Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (19 octobre 2009) **Correction**

Question 1. *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice définie par*

$$A_{ij} = \begin{cases} \pi^j & si\ i \leqslant j \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Montrez par récurrence que, pour tout $n \geqslant 2$, on a dét$A = \pi^{n(n+1)/2}$.

<u>Cas de base :</u> $n = 2$. Dans ce cas, $A = \begin{pmatrix} \pi & \pi^2 \\ 0 & \pi^2 \end{pmatrix}$. Donc dét$A = \pi^3$ et $\pi^{2(2+1)/2} = \pi^3$. L'égalité est donc vérifiée pour $n = 2$.

<u>Hypothèse de récurrence :</u> supposons que l'égalité soit vérifiée $\forall n \leqslant k$ avec $k \geqslant 2$. En particulier, si $n = k$, on a

$$\text{dét}\begin{pmatrix} \pi & \pi^2 & \pi^3 & \dots & \pi^k \\ 0 & \pi^2 & \pi^3 & \dots & \pi^k \\ 0 & 0 & \pi^3 & \dots & \pi^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \pi^k \end{pmatrix} = \pi^{k(k+1)/2}.$$

Montrons l'égalité pour $n = k+1$: en développant selon la dernière ligne, on obtient

$$\text{dét}\begin{pmatrix} \pi & \dots & \pi^k & \pi^{k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \pi^{k+1} \end{pmatrix} = \pi^{k+1} \cdot (-1)^{k+1+k+1} \cdot \text{dét}\begin{pmatrix} \pi & \pi^2 & \dots & \pi^k \\ 0 & \pi^2 & \dots & \pi^k \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \pi^k \end{pmatrix}.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient que le membre de droite est égal à

$$\begin{aligned} \pi^{k+1} \cdot (-1)^{2k+2} \cdot \pi^{k(k+1)/2} &= \pi^{k+1+\frac{k(k+1)}{2}} && \text{(car } 2k+2 \text{ est un nombre pair)} \\ &= \pi^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}. \end{aligned}$$

Question 2. *Les relations suivantes définissent-elles des fonctions ?*

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y$ *tel que* $y^3 - y = x$ *;*

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y$ *tel que* $y^3 = x$*.*

Justifiez vos affirmations.

(a) f ne définit pas une fonction. En effet, pour (par exemple) $x = 0$, il y a plusieurs y qui lui correspondent, à savoir (au moins) $y = 0$ et $y = 1$ car ces deux valeurs sont des solutions de l'équation $y^3 - y = 0$.

(b) g définit une fonction. En effet, pour un $x \in \mathbb{R}$ donné, il n'existe qu'une seule solution $y^3 = x$ (qui est la propriété que les y doivent satisfaire pour correspondre à x), à savoir $y = \sqrt[3]{x}$.

Question 3. *Soient les ensembles* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ *et* $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$. *Justifiez qu'on a* $A \subseteq B$ *mais pas* $B \subseteq A$.

- $A \subseteq B$. Prenons un (x,y) arbitraire dans A et montrons que $(x,y) \in B$. Par définition, $(x,y) \in A$ signifie que $x = y$. Dès lors, en élevant les deux membres au carré, on obtient $x^2 = y^2$ (règle de calcul vue au cours). Donc (x,y) satisfait la propriété d'appartenance à B.
- $B \nsubseteq A$. Il suffit pour cela d'exhiber un couple $(x,y) \in B$ tel que $(x,y) \notin A$. Prenons $(x,y) = (1,-1)$. Comme $x^2 = 1^2 = (-1)^2 = y^2$, le couple $(1,-1) \in B$. De plus $(x,y) \notin A$ car il ne vérifie pas la propriété $x = y$.

Question 4. *Soient les nombres complexes* $z_1 = \frac{1}{2}(-1+\boldsymbol{i}\sqrt{3})$ *et* $z_2 = \frac{1}{2}(-1-\boldsymbol{i}\sqrt{3})$.

(a) *Donnez la forme trigonométrique de* z_1 *et* z_2.

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3},$$
$$z_2 = -\frac{1}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}.$$

(b) *Soit la matrice* $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ *définie par*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z_1 & z_2 \\ 1 & z_2 & z_1 \end{pmatrix}$$

Calculez $M \cdot M$ *et déduisez-en la matrice* M^{-1}. *Expliquez votre démarche.*

$$M \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z_1 & z_2 \\ 1 & z_2 & z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z_1 & z_2 \\ 1 & z_2 & z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1+z_1+z_2 & 1+z_1+z_2 \\ 1+z_1+z_2 & 1+{z_1}^2+{z_2}^2 & 1+z_1z_2+z_1z_2 \\ 1+z_1+z_2 & 1+z_1z_2+z_1z_2 & 1+{z_1}^2+{z_2}^2 \end{pmatrix}$$

Or,

$$\begin{aligned} 1+z_1+z_2 &= 1+\left(-\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}-\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0, \\ 1+2z_1z_2 &= 1+2\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3} = 1+2\operatorname{cis}0 = 0 && (\text{car } \operatorname{Arg}(zz') = \operatorname{Arg}(z)+\operatorname{Arg}(z') \bmod 2\pi), \\ 1+{z_1}^2+{z_2}^2 &= 1+\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}+\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3} = 0 && (\text{car } \operatorname{Arg}(z^n) = n\operatorname{Arg}(z) \mod 2\pi). \end{aligned}$$

Donc

$$M \cdot M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir l'identité à partir de $M \cdot M$, il suffit de multiplier chacune des lignes par $\frac{1}{3}$ et d'ensuite permuter les lignes 2 et 3. Or, effectuer une transformation élémentaire sur les lignes d'une matrice revient à multiplier à gauche cette matrice par l'identité dans laquelle on a appliqué la même transformation. Dès lors on a :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\cdot M}_{=M^{-1}}\cdot M=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Donc,

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}\frac13&0&0\\0&0&\frac13\\0&\frac13&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&z_1&z_2\\1&z_2&z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac13&\frac13&\frac13\\\frac13&\frac{z_2}{3}&\frac{z_1}{3}\\\frac13&\frac{z_1}{3}&\frac{z_2}{3}\end{pmatrix}.$$

Question 5.

(a) *Calculez, si possible, l'inverse de la matrice*

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&4\\3&2&0\end{pmatrix}$$

(b) *Déduisez du point précédent l'ensemble des solutions du système*

$$\begin{cases}x_1+x_3=7\\2x_1+x_2+4x_3=0\\3x_1+2x_2=-14\end{cases}$$

Expliquez votre démarche.

(a)

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&4\\3&2&0\end{pmatrix}\qquad\qquad \mathrm{Id}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&2&-3\end{pmatrix}\qquad \begin{matrix}L_2\leftarrow L_2-2L_1\\L_3\leftarrow L_3-3L_1\end{matrix}\qquad \begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&-7\end{pmatrix}\qquad L_3\leftarrow L_3-2L_2\qquad \begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\1&-2&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad L_3\leftarrow \frac{L_3}{-7}\qquad \begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\\frac{-1}{7}&\frac{2}{7}&\frac{-1}{7}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad \begin{matrix}L_1\leftarrow L_1-L_3\\L_2\leftarrow L_2-2L_3\end{matrix}\qquad \begin{pmatrix}\frac{8}{7}&-\frac{2}{7}&\frac{1}{7}\\-\frac{12}{7}&\frac{3}{7}&\frac{2}{7}\\-\frac{1}{7}&\frac{2}{7}&-\frac{1}{7}\end{pmatrix}=A^{-1}$$

(b) Le système s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -14 \end{pmatrix}.$$

En multipliant à gauche par A^{-1} de chaque côté, on obtient :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 \\ -12 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -16 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des solutions est donc $\{(6,-16,1)\}$.

Question 6. *Calculez les déterminants suivants :*

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2\cdot 4(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -2\cdot 4\cdot(-48) = 384$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix}$$

$= abc$ car le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments situés sur la diagonale principale.

Question 7. *Calculez les sommes suivantes :*

- $\displaystyle\sum_{i=-3}^{k} k^2+t^2+2 = (k^2+t^2+2)\sum_{i=-3}^{k} 1 = (k^2+t^2+2)(k+4)$
- $\displaystyle\sum_{i=-1}^{k}\sum_{j=0}^{k} i^2-j^2 = \underbrace{\sum_{j=0}^{k}(-1)^2-j^2}_{\text{terme en } i=-1} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k} i^2-j^2}_{=0\text{(antisymétrie)}} = \sum_{j=0}^{k} 1 - \sum_{j=0}^{k} j^2 = (k+1) - \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=i}^{\ell} i+j = \sum_{i=1}^{\ell}\left(\sum_{j=1}^{\ell}(i+j) - \sum_{j=1}^{i-1}(i+j)\right) = \sum_{i=1}^{\ell}\left(\ell i + \frac{\ell(\ell+1)}{2} - (i-1)i - \frac{(i-1)i}{2}\right)$

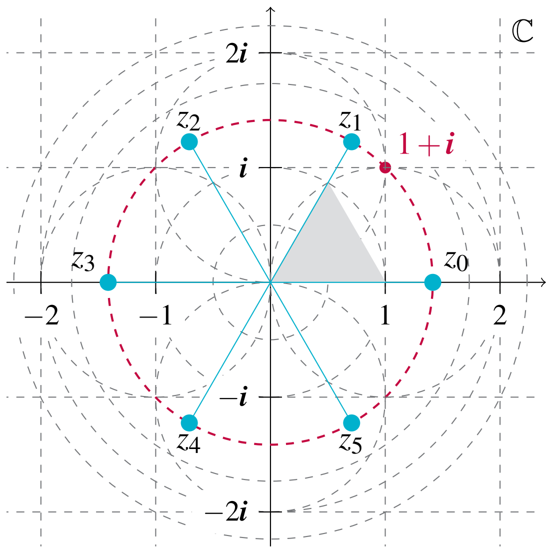
$$= -\sum_{i=1}^{\ell}\left(\ell i + \frac{\ell(\ell+1)}{2} - \frac{3}{2}(i-1)i\right) = \ell\sum_{i=1}^{\ell} i + \frac{\ell^2(\ell+1)}{2} - \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{\ell}(i^2-i)$$

$$= \ell^2(\ell+1) - \frac{3}{2}\left(\frac{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}{6} - \frac{\ell(\ell+1)}{2}\right)$$

$$= \ell^2(\ell+1) - \frac{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}{4} + \frac{3}{4}\ell(\ell+1) = \tfrac{1}{2}\ell(\ell+1)(\ell-1)$$

Question 8. *Calculez et représentez graphiquement les solutions de l'équation $X^6 = 8$.*

Remarquons tout d'abord que $\sqrt{2}$ est une solution particulière de cette équation. On sait donc que les solutions de $X^6 = 8$ sont données par $\sqrt{2}z$ où z est une solution de $X^6 = 1$. Soit z une telle solution, en posant $z = |z| \operatorname{cis} \theta$ (où θ est l'argument de z) nous obtenons $|z|^6 \operatorname{cis} 6\theta = 1$. Par égalité de deux complexes sous forme trigonométrique, on peut déduire que $|z|^6 = 1$ et $6\theta \bmod 2\pi = 0$. Puisque $|z| \in \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, nous obtenons $|z| = 1$ et $\theta \in \{k\frac{\pi}{3} | k = 0, 1, \dots, 5\}$. Les solutions, sous forme trigonométrique, sont donc $z_k := \sqrt{2} \operatorname{cis}(k\frac{\pi}{3})$ où $k \in \{0, 1, \dots, 5\}$.
Géométriquement, ces solutions sont sur le cercle de rayon $\sqrt{2}$ (c'est le cercle passant par $1 + \boldsymbol{i}$). L'angle de $\pi/3$ est celui d'un triangle équilatéral ; par exemple, le sommet de celui de base $(0,0)$–$(1,0)$ se trouve à l'intersection des deux cercles de rayon 1 centrés en ces points.



Question 9.

(a) *Prouvez que*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3 \tag{1}$$

(b) *Donnez une explication géométrique de* (1) *en traçant un carré de côté* $\sum_{i=0}^{n} i$*, par exemple.*

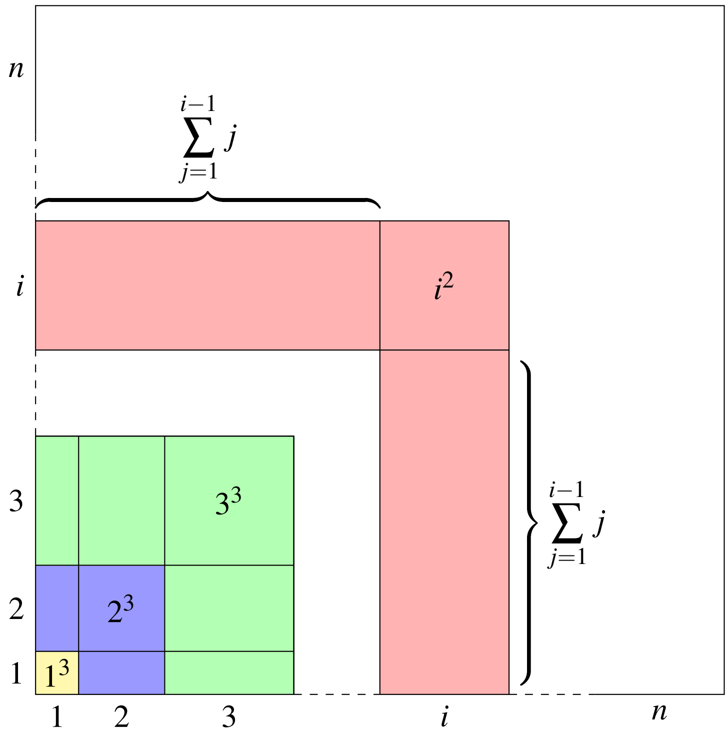
(a) Prouvons l'égalité (1) par récurrence sur n. Pour le cas de base ($n = 1$) cette égalité devient $1^2 = 1^3$ qui est toujours vrai. Supposons maintenant que (1) est vérifiée pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ et prouvons cette égalité pour $k = n+1$. Le deuxième membre de l'égalité vaut alors

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i^3 &= \left(\sum_{i=1}^{n} i^3\right) + (n+1)^3 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 + (n+1)^3 && \text{(hypothèse de récurrence)} \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \\
&= (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) \\
&= (n+1)^2 \frac{(n+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n+1} i\right)^2$$

L'égalité (1) est donc bien vérifiée quelque soit $n \geqslant 1$.

(b) La propriété apparaît au travers des coloriages de la figure ci-dessous :



La justification du fait que la bande rose est d'aire i^3 se fait à l'aide du calcul suivant :

$$i^2 + 2i\sum_{j=1}^{i-1} j = i^2 + 2i\frac{(i-1)i}{2} = i^2(1+i-1) = i^3.$$