

# Mathématique Élémentaire

Test n° 2

(21 septembre 2009)

Correction

Question 1. *Calculer*

- $\overline{1+3i} = 1-3i$
- $|1+3i|^2 = 1^2 + 3^2 = 10$
- $(1+3i) \cdot (4-9i) = 4 - 27i^2 + (12-9)i = 31 - 3i$
- $i^{-1} = -i$  (car  $-i \cdot i = 1$ )
- $\left(\frac{1-\sqrt{2}i}{2}\right)^{-1} = \frac{\overline{\left(\frac{1-\sqrt{2}i}{2}\right)}}{\left|\frac{1-\sqrt{2}i}{2}\right|} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i}{3/4} = \frac{2}{3}(1 + \sqrt{2}i)$

Question 2. *Prouver que  $2+i$  est solution de l'équation  $X^2 - (1-i)X - 5i = 0$ .*

Il suffit de vérifier que  $(2+i)^2 - (1-i)(2+i) - 5i = 0$ . Le premier membre est égal à  $4 + i^2 + 4i - (2 - i^2 + i - 2i) - 5i = 3 + 4i - (3 - i) - 5i = 0$ .

Question 3. *Résoudre, dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $X^2 - 7X + 13 = 0$ .*

Le discriminant de cette équation est égal à  $(-7)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 13 = 49 - 52 = -3$ . L'équation auxiliaire est donc  $Y^2 = -3$  et a pour solutions  $y_1 = i\sqrt{3}$  et  $y_2 = -i\sqrt{3}$ . Il s'ensuit (par la théorie vue au cours) que les solutions de l'équation de départ sont  $x_1 = \frac{7+i\sqrt{3}}{2}$  et  $x_2 = \frac{7-i\sqrt{3}}{2}$ .

Question 4. *Soient les vecteurs  $u = (-1, -3, 2)$  et  $v = (0, 1, 4)$ . Calculez*

- $(u|v) = -1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 0 - 3 + 8 = 5$
- $\|2u - v\|$

On a  $2u - v = (-2, -6, 4) - (0, 1, 4) = (-2, -7, 0)$ . Donc  $\|2u - v\| = \sqrt{(-2)^2 + (-7)^2} = \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53}$ .

- *la distance entre  $u$  et  $v$*

$\text{dist}(u, v) = \sqrt{(-1-0)^2 + (-3-1)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{1+16+4} = \sqrt{21}$ .

Question 5. *Donnez les composantes du vecteur  $v \in \mathbb{R}^2$  dont la norme vaut 2 et faisant un angle de  $\frac{\pi}{4}$  rad avec l'axe des  $x$ . Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.*

On a vu au cours que si  $v \neq 0$ , alors  $v/\|v\|$ , c'est-à-dire ici  $v/2$ , est de norme 1. C'est donc un point du cercle trigonométrique. Un tel point a pour coordonnée  $(\cos \theta, \sin \theta)$  avec ici  $\theta = \frac{\pi}{4}$  rad. Donc  $\frac{v}{2} = (\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ . Il s'ensuit que  $v = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ .

Question 6. *Soit  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  et  $x_6$  six naturels distincts. On considère l'ensemble  $S$  des sommes de deux éléments de la forme  $x_i + x_j$  avec  $i < j$ .*

*On a vu au cours qu'il y aura au plus 15 valeurs distinctes pour les sommes  $x_i + x_j$ .*

- (a) *Prouver que, quel que soit le choix des valeurs naturelles pour  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  et  $x_6$ , il y aura toujours au moins 9 sommes de valeurs distinctes parmi les sommes d'éléments de  $S$ .*
- (b) *Donner un exemple où il y en a exactement neuf distinctes.*
- (c) *Donner un exemple où il y en a exactement quinze distinctes.*

(a) Les  $x_i$ 's sont des éléments de  $\mathbb{N}$ , qui admet un ordre, on peut donc supposer (après avoir éventuellement renommer les éléments) que  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$ . Puisque l'ordre sur  $\mathbb{N}$  est compatible avec l'addition (càd  $\forall a, b, c \in \mathbb{N}, a < b \Rightarrow c + a < c + b$ ), nous obtenons que  $x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$  entraîne

$$x_1 + x_2 < x_1 + x_3 < x_1 + x_4 < x_1 + x_5 < x_1 + x_6. \tag{1}$$

De plus  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$  entraîne

$$x_1 + x_6 < x_2 + x_6 < x_3 + x_6 < x_4 + x_6 < x_5 + x_6. \tag{2}$$

Les inégalités (1) et (2) fournissent par transitivité 9 éléments du type « somme  $x_i + x_j$  avec  $i < j$  » tous distincts.

(b) Si  $x_i = i$  (pour  $i = 1, 2, \dots, 6$ ), la somme minimale est  $x_1 + x_2 = 3$  et la somme maximale est  $x_5 + x_6 = 11$ . Puisque toutes les sommes  $x_i + x_j$  ( $i < j$ ) vérifient  $x_1 + x_2 \leq x_i + x_j \leq x_5 + x_6$  et appartiennent à  $\mathbb{N}$ , celles-ci sont parmi les 9 naturels de l'intervalle  $[3, 11]$ . Et comme le nombre de sommes distinctes (par le point (a)) est au minimum 9, il y a exactement 9 sommes distinctes dans ce cas-ci.

(c) En choisissant des écarts suffisamment croissants entre les  $x_i$ 's, on obtient 15 sommes distinctes. Par exemple  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 7, x_5 = 12, x_6 = 20$ .

+	1	2	4	7	12	20
1	/	3	5	8	13	21
2		/	6	9	14	22
4			/	11	16	24
7				/	19	27
12					/	32
20						/

Question 7. Calculez  $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , en donnant une règle en fonction de  $n$ . Prouvez votre formule.

On remarque que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + i^2 \frac{\sqrt{3}^2}{2^2} + i \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \tag{3}$$

et que  $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  est de la forme  $-z\bar{z}$ , c'ad  $-|z|^2$  qui dans ce cas-ci vaut  $-\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) = -1$ . Il s'ensuit que  $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^4 = -1\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$  et que  $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^5 = -1\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$  (vu (3)). Finalement nous avons  $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6 = -1 \cdot (-1) = 1$ . En effectuant la division entière de  $n$  par 6, on peut écrire  $n = q \cdot 6 + r$  avec  $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ . Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n &= \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{6q} \cdot \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^r \\ &= \left(\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6\right)^q \cdot \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^r = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^r. \end{aligned}$$

Donc  $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n \bmod 6}$ .

Question 8. Soient  $u, v$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^N$  et soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- (a) Montrez que  $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$ . Veillez à citer les propriétés que vous utilisez.
- (b) Montrez que  $(u|u) = \|u\|^2$ .
- (c) Montrez que  $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$ . Expliquez votre démarche et citez les propriétés que vous utilisez.

Posons  $u = (u_1, \dots, u_N)$  et  $v = (v_1, \dots, v_N)$ .

(a) On a :

$$\begin{aligned}
 \alpha(u+v) &= \alpha((u_1 + \dots, u_N) + (v_1 + \dots, v_N)) && \text{(définition de } u \text{ et } v\text{).} \\
 &= \alpha(u_1 + v_1, \dots, u_N + v_N) && \text{(addition de deux vecteurs)} \\
 &= (\alpha(u_1 + v_1), \dots, \alpha(u_N + v_N)) && \text{(multiplication d'un vecteur d'un réel)} \\
 &= (\alpha u_1 + \alpha v_1, \dots, \alpha u_N + \alpha v_N) && \text{(distributivité dans } \mathbb{R}\text{)} \\
 &= (\alpha u_1, \dots, \alpha u_N) + (\alpha v_1 + \alpha v_N) && \text{(addition de deux vecteurs)} \\
 &= \alpha u + \alpha v && \text{(multiplication d'un vecteur d'un réel)}
 \end{aligned}$$

(b) Fait au cours.

(c) On a :

$$\begin{aligned}
 &\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 \\
 &= (u+v|u+v) + (u-v|u-v) && \text{(par (b))} \\
 &= (u|u+v) + (v|u+v) + (u|u-v) + (v|u-v) && \text{(car } (x+y|z) = (x|z) + (y|z)\text{)} \\
 &= (u|u) + (u|v) + (v|u) + (v|v) + (u|u) - (u|v) - (v|u) + (v,v) \\
 &\quad \text{(car } (x|y+z) = (x|y) + (x|z) \text{ et } \alpha(x|y) = (\alpha x|y) = (u|\alpha y) \text{ lorsque } \alpha \in \mathbb{R}\text{)} \\
 &= (u|u) + (v|v) + (u|u) + (v|v)
 \end{aligned}$$

Donc, en utilisant de nouveau (b), nous obtenons  $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$ .

Question 9. Vérifier que  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  est solution de l'équation  $X^3 - 2X - 1 = 0$ .

Il suffit de substituer  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  à  $X$  dans l'équation et donc de vérifier que

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - 2\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = 0 \quad (4)$$

en évaluant le premier membre de cette égalité. On a

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} = \frac{6}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \quad (5)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} && \text{par (5)} \\ &= 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 1. \end{aligned}$$

On voit donc clairement que l'équation (4) est satisfaite.