

# Mathématique Élémentaire

Test n° 5

(13 octobre 2008)

Correction

Question 1. Vérifiez que  $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A)$  est une tautologie.

La table de vérité de cette formule est la suivante :

$A$	$B$	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A$	$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1

Les valeurs de vérité de la dernière colonne étant toutes 1, la proposition est bien une tautologie.

Question 2. Donnez la négation de « s'il pleut, je mets mon maillot de bain ».

Il s'agit d'une proposition du type  $A \Rightarrow B$  avec  $A$  valant « il pleut » et  $B$  étant « je mets mon maillot de bain ». La négation en est  $A \wedge \neg B$  et donc, pour le cas particulier qui nous intéresse ici : « il pleut et [malgré cela] je ne mets pas mon maillot de bain ».

Question 3. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Calculez  $A^2$ . Détaillez vos calculs.

Remarquons que  $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \text{cis } \frac{2\pi}{3}$  et  $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \text{cis } \frac{4\pi}{3}$ . On a donc :

$$\begin{aligned} A^2 = A \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+1+1 & 1+\text{cis } \frac{4\pi}{3} + \text{cis } \frac{2\pi}{3} & 1+\text{cis } \frac{2\pi}{3} + \text{cis } \frac{4\pi}{3} \\ 1+\text{cis } \frac{4\pi}{3} + \text{cis } \frac{2\pi}{3} & 1+\text{cis } \frac{8\pi}{3} + \text{cis } \frac{4\pi}{3} & 1+\text{cis } \frac{6\pi}{3} + \text{cis } \frac{6\pi}{3} \\ 1+\text{cis } \frac{2\pi}{3} + \text{cis } \frac{4\pi}{3} & 1+\text{cis } \frac{6\pi}{3} + \text{cis } \frac{6\pi}{3} & 1+\text{cis } \frac{4\pi}{3} + \text{cis } \frac{8\pi}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où on a utilisé la formule  $\text{cis } \theta \cdot \text{cis } \theta' = \text{cis}(\theta + \theta')$ . Or  $\text{cis } \frac{6\pi}{3} = \text{cis } 0 = 1$ ,  $\text{cis } \frac{8\pi}{3} = \text{cis } \frac{2\pi}{3}$  et  $1 + \text{cis } \frac{2\pi}{3} + \text{cis } \frac{4\pi}{3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$ . Donc

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Question 4. Soit  $\alpha$  une racine de l'équation  $X^n = 1$ .

(a) Prouvez que si  $k \in \mathbb{Z}$ , alors  $\alpha^k$  est aussi une racine de l'équation  $X^n = 1$ .

Par définition de « être racine », il faut vérifier que  $(\alpha^k)^n = 1$ . C'est vrai car  $(\alpha^k)^n = \alpha^{kn} = (\alpha^n)^k = 1^k = 1$ .

(b) Prouvez que  $\{\alpha^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \{\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^{n-1}\}$ .

Prouver cette inclusion veut dire montrer que tous les éléments de l'ensemble  $\{\alpha^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$  appartiennent bien à  $\{\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^{n-1}\}$ . Soit  $\alpha^k$  un élément du premier ensemble (on sait juste qu'un tel  $k \in \mathbb{Z}$  existe, on ne peut rien supposer sur  $k$ ). Montrer que  $\alpha^k \in \{\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^{n-1}\}$  signifie montrer que  $\alpha^k = \alpha^\ell$  pour un  $\ell \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Or la division Euclidienne dit que  $k = qn + r$  pour  $q, r \in \mathbb{Z}$  avec  $0 \leq r < n$  c'est-à-dire  $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Donc  $\alpha^k = \alpha^{qn+r} = (\alpha^n)^q \cdot \alpha^r = 1^q \cdot \alpha^r = \alpha^r$ . Il suffit donc de prendre  $\ell = r$ .

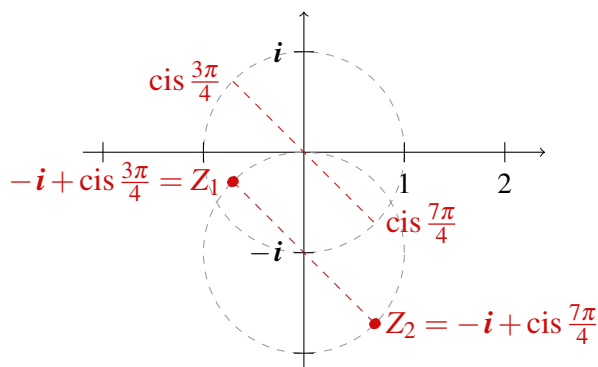
Question 5. Calculez les solutions complexes  $Z$  de l'équation  $Z^2 + 2iZ - 1 + i = 0$ . Écrivez-les sous la forme  $a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) et représentez-les dans le plan complexe.

L'équation à résoudre est de la forme  $aZ^2 + bZ + c = 0$  avec  $a = 1$ ,  $b = 2i$  et  $c = -1 + i$ . L'équation auxiliaire est  $Y^2 = b^2 - 4ac = (2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1 + i) = -4i = 4 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$ . Elle a pour solutions  $Y_1 := 2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$  et  $Y_2 := \operatorname{cis} \frac{7\pi}{4} = -Y_1$ . L'équation de départ possède donc les solutions

$$Z_1 := \frac{-2i + Y_1}{2} = \frac{-2i - \sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{-2 + \sqrt{2}}{2}i \quad \text{et}$$

$$Z_2 := \frac{-2i + Y_2}{2} = \frac{-2i + \sqrt{2} - \sqrt{2}i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{-2 - \sqrt{2}}{2}i$$

Le plus simple pour représenter  $Z_1$  et  $Z_2$  est sans doute de remarquer qu'ils s'écrivent sous la forme  $Z_1 = -i + \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$  et  $Z_2 = -i + \operatorname{cis} \frac{7\pi}{4}$ . Il suffit donc de translater les deux nombres sur le cercle trigonométrique au point  $-i$ .



Question 6. Dites si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto y$  tel que  $\operatorname{tgy} = x$  est une fonction. Justifiez.

$f$  n'est pas une fonction. En effet, il existe au moins un  $x$  auquel correspond plusieurs  $y$ . Par exemple, pour  $x = 0$ ,  $y = 0$  et  $y = \pi$  sont deux solutions de  $\operatorname{tgy} = x$  (il y a en vérité l'infinité de solutions  $y = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , à cette équation mais le fait qu'il y en aie deux suffit à contredire la définition de fonction).

Question 7.

- Déterminez le domaine de la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{\sqrt{x}-2}}$ .

Trois conditions sont à vérifier pour que l'expression qui définit  $f(x)$  ait un sens :

- ▶  $x \geq 0$  pour que  $\sqrt{x}$  existe ;
- ▶  $\sqrt{x} - 2 \neq 0$  pour qu'on puisse diviser par cette expression ;
- ▶  $\frac{x-1}{\sqrt{x}-2} \geq 0$  pour pouvoir en prendre la racine.

Comme l'équation  $\sqrt{x} - 2 = 0$  est équivalente à  $\sqrt{x} = 2$  ou encore — vu que les deux membres sont positifs — à  $x = 4$ , la seconde condition est équivalente à  $x \neq 4$ . Le signe de la fraction se déduit simplement du signe du numérateur et du dénominateur :

	0	1	4
$x-1$	-	0	+
$\sqrt{x}-2$	-	-	0
$\frac{x-1}{\sqrt{x}-2}$	+	0	+

Le domaine de  $f$  est donc  $[0, 1] \cup ]4, +\infty[$ .

- Déterminez l'image de la fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^2, -2t^2 + 1)$ .

Par définition de l'image, on a

$$\operatorname{Im} g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{il existe } t \in \mathbb{R}, (x, y) = (t^2, -2t^2 + 1)\}$$

Nous allons montrer que cet ensemble n'est rien d'autre que

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2x + 1 \wedge x \geq 0\}$$

Appelons  $A$  ce dernier ensemble. Montrer  $\operatorname{Im} g = A$  requiert de prouver deux inclusions.

- ▶  **$\operatorname{Im} g \subseteq A$ .** Soit  $(x, y) \in \operatorname{Im} g$ . Par définition, on sait qu'il existe un certain  $t \in \mathbb{R}$  (on sait juste que  $t$  existe, on ne connaît pas sa valeur exacte) tel que  $(x, y) = (t^2, -2t^2 + 1)$  i.e.,  $x = t^2$  et  $y = -2t^2 + 1$ . Par conséquent on a bien que  $x = t^2 \geq 0$  et  $y = -2t^2 + 1 = -2x + 1$  ce qui dit que le couple  $(x, y)$  vérifie les deux conditions nécessaires pour que  $(x, y) \in A$ .
- ▶  **$A \subseteq \operatorname{Im} g$ .** Soit  $(x, y) \in A$ , c'est-à-dire  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  qui vérifie les deux conditions  $y = -2x + 1$  et  $x \geq 0$ . Pour établir que  $(x, y) \in \operatorname{Im} g$ , il faut montrer qu'il existe un  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $(x, y) = (t^2, -2t^2 + 1)$ . Prenons  $t = \sqrt{x}$ . C'est possible car  $x \geq 0$ . On a bien  $t^2 = (\sqrt{x})^2 = x$  et  $y = -2x + 1 = -2t^2 + 1$ . Le fait d'avoir pu exhiber un  $t$  tel que  $(x, y) = (t^2, -2t^2 + 1)$  implique que  $(x, y) \in \operatorname{Im} g$ .

Question 8.

(a) Soient  $A, B \in \mathbb{R}^{p \times p}$ . Montrez que  $(A + B)^t = A^t + B^t$ . Pour rappel, si  $M \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $M^t$  désigne la transposée de  $M$ .

Nous devons montrer que  $\forall i, j = 1, \dots, p$ ,  $(A + B)_{ij}^t = A_{ij}^t + B_{ij}^t$ . Soient  $i, j \in \{1, \dots, p\}$ . On a :

$$\begin{aligned} (A + B)_{ij}^t &= (A + B)_{ji} && \text{par définition de la transposée} \\ &= A_{ji} + B_{ji} && \text{par définition de l'addition matricielle} \\ &= A_{ij}^t + B_{ij}^t && \text{par définition de la transposée} \end{aligned}$$

(b) Soient  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}^{p \times p}$ . Montrez par récurrence que, pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$(A_1 A_2 \cdots A_n)^t = A_n^t \cdots A_2^t A_1^t \tag{1}$$

**Le cas de base**,  $n = 1$ , affirme que  $(A_1)^t = A_1^t$ . C'est trivialement vérifié.

**Étape de récurrence** : Supposons que l'égalité (1) soit vérifiée pour tous les naturels  $n \leq k$  (avec  $k \geq 1$ ) ; prouvons que, sous cette hypothèse de récurrence, l'égalité (1) est vérifiée pour  $n = k + 1$ , c'est-à-dire que

$$(A_1 A_2 \cdots A_k A_{k+1})^t = A_{k+1}^t A_k^t \cdots A_2^t A_1^t.$$

On a :

$$\begin{aligned} (A_1 A_2 \cdots A_k A_{k+1})^t &= ((A_1 A_2 \cdots A_k) A_{k+1})^t && \text{associativité du produit matriciel} \\ &= A_{k+1}^t (A_1 A_2 \cdots A_k)^t && \text{car } (AB)^t = B^t A^t \\ &= A_{k+1}^t (A_k^t \cdots A_2^t A_1^t) && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= A_{k+1}^t A_k^t \cdots A_2^t A_1^t && \text{associativité du produit matriciel} \end{aligned}$$

Question 9.

(a) Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Définissez «  $A$  est une matrice symétrique ».

$A$  est symétrique si  $A^t = A$  où  $A^t$  désigne la transposée de  $A$ .

(b) Soit la matrice  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matrice définie par

$$M_{ij} = (-1)^{i+j}(i^3 - j^3)^2$$

La matrice  $M$  est-elle symétrique ? Expliquez votre raisonnement et détaillez vos calculs.

Regardons si  $M^t = M$  c'est-à-dire  $\forall i, j = 1, \dots, n, M_{ij}^t = M_{ij}$ . On a :

$$\begin{aligned} M_{ij}^t &= M_{ij} && \text{par définition de la transposée} \\ &= (-1)^{j+i}(j^3 - i^3)^2 && \text{par définition de } M \\ &= (-1)^{i+j}(-(i^3 - j^3))^2 && \text{car } (-1)^{i+j} = (-1)^{j+i} \\ &= (-1)^{i+j} \underbrace{(-1)^2}_{=1} (i^3 - j^3)^2 = M_{ij} \end{aligned}$$

(c) Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . On définit la trace de  $A$ , notée  $\text{tr}A$ , par  $\text{tr}A = \sum_{i=1}^n A_{ii}$ . Calculez la trace de la matrice  $M$  définie au point précédent.

On a  $M_{ii} = (-1)^{i+i}(i^3 - i^3)^2 = 0$  pour tout  $i$ . Donc  $\text{tr}M = \sum_{i=1}^n M_{ii} = \underbrace{0+0+\dots+0}_{n \text{ fois}} = 0$ .

Question 10. Prouvez par récurrence que

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

**Cas initial :  $n = 0$**

Le premier membre de l'égalité est  $0^2 = 0$ .

Le second membre de l'égalité est  $\frac{0(0+1)(2 \cdot 0+1)}{6} = 0$ .

Le cas initial est donc vérifié.

**Étape de récurrence :**

Supposons (hypothèse de récurrence) que la formule soit vérifiée pour tout naturel  $n \leq k$  ( $k \geq 1$ ) et montrons que, sous cette hypothèse, la formule est vérifiée en  $n = k + 1$ . Dans ce cas, le premier membre devient :

$$\begin{aligned} 0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{hyp. de réc. pour } n=k \\ &= (k+1) \left[ \frac{k(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)}{6} \right] = \frac{k+1}{6} (2k^2 + k + 6k + 6) \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6} \end{aligned}$$

car  $(k+2)(2(k+1)+1) = 2k^2 + 6k + 4 + k + 2 = 2k^2 + 7k + 6$ .