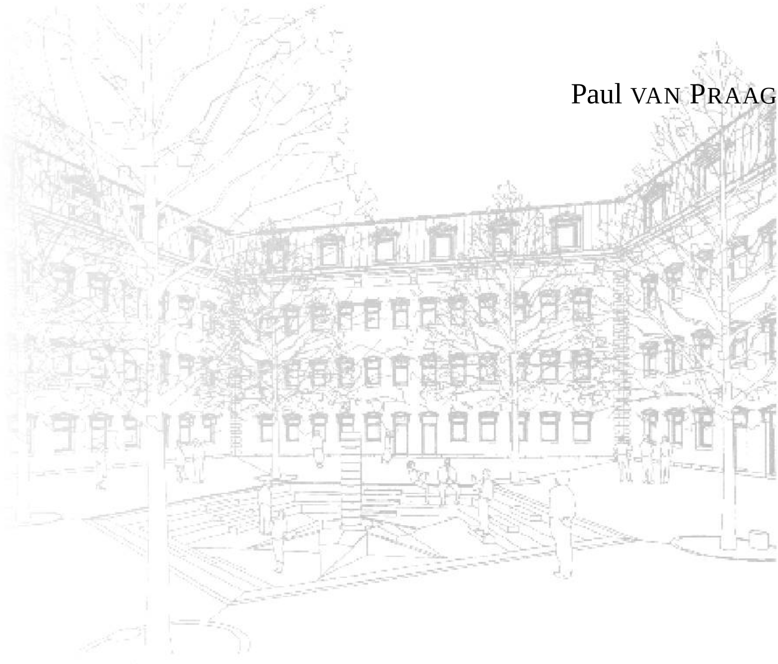
Prépublication #8
17 avril 2001

Pedro Nuñez, Simon Stevin, et le plus grand commun diviseur des polynômes

Paul VAN PRAAG



Institut de Mathématique et d'Informatique
Université de Mons-Hainaut
Tél : +32 65 37 35 07 — Fax : +32 65 37 33 18
Web : http://www.umh.ac.be/math/institut

Pedro Nuñez, Simon Stevin, et le plus grand commun diviseur des polynômes

Paul VAN PRAAG

Université de Mons-Hainaut
Institut de Mathématique
« Le Pentagone »
Avenue du Champ de Mars, 6
B-7000 Mons (Belgique)

Résumé. Contrairement à des affirmations, Pedro Nuñez a bien présenté dans son Libro de Algebra la recherche des diviseurs communs à deux polynômes comme élément d'une méthode de résolution des équations. Cette méthode intègre une astuce attribuée à Cardan.

La Nota de Simon Stevin sur le plus grand commun diviseur, dans son Arithmétique, semble donc bien correspondre à la réalité. Mais Stevin n'indique pas pourquoi il n'a utilisé que fort peu son algorithme.

1 Le pgcd des polynômes : Nuñez et Stevin

1.1 Introduction

1. Le texte de Stevin fut publié pour la première fois dans [9, p. 240] ([10, p. 577] nous nous réfèrerons dorénavant à ce dernier ouvrage) :

> PROBLEME LIII
>
> E*Stant donnez deux multinomies algebraiques : Trouver leur plus grande commune mesure.*
>
> NOTA. Petrus Nonius au commencement de la troisielme partie de son Algebre, estimoit qu'alors ce probleme n'estoit pas generale reigle inuenté, parquoi il en descripuoit quelque manière a tastons. Nous descriprons sa legitime construction, qui sera semblable à l'operation de l'inuention, de la plus grande commune mesure des nombres Arithmetiques entiers du 5 probleme : à sçauoir on diuisera premirement le maieur par le moindre, & puis le diuiseur autrefois par la reste, iusques, à ce qu'il n'y reste rien, & c. comme le tout sera plus clair par exemple.

2. Henri Bosmans a consacré deux articles au Libro de Algebra de Pedro Nuñez : [2] et [3]. Le premier étudie plus spécialement la troisième partie du Libro de Algebra, celle précisément à laquelle se refère Stevin. Bosmans semble interpréter le terme « sa » de « sa légitime construction » du texte de Stevin comme se rapportant à Nuñez. Il déduit alors de son analyse des efforts de Nuñez que Stevin est trop modeste, mais que la lecture des travaux de Nuñez fut un stimulant pour Stevin. Bosmans signale aussi la question dans [4].

3. Dans [10], D.J. Struik va plus loin : p. 463, note 8, il renvoie à [2] en attribuant à son auteur l'opinion qu'il n'y a pas de raison de penser que Nuñez ait jamais eu l'intention de rechercher le pgcd de deux polynômes.

1.2 « Petrus Nonius au commencement de la troisième partie de son Algèbre »

Nuñez commence par montrer comment simplifier l'allure de certaines équations en ajoutant ou en retranchant une même expression aux deux membres. Puis ([7], bas de la page 151, p. 152) l'équation $2x^3+5x^4=3x^5$ se simplifie en divisant par x^3 en $5x+2=3x^2$. Il remarque que cette méthode ne fonctionne pas si un seul des deux membres est un polynôme dont le terme indépendant n'est pas nul. Il dit alors qu'on va rechercher une autre méthode : chercher s'il existe un diviseur commun :

> Y porque si ay numero en la compañia de las dignidades, no se pueden abatir por este modo : buscaremos entonces otro remedio, y sera ver si tienen partidor commun, por el qual entrambas quantidades que queremos ygualar puedan ser partidas.

Il prend un exemple particulièrement intéressant :

$$x^3+x^2=x^2+7x+6 \tag{1}$$

Il dit qu'il n'est pas judicieux de supprimer x^2 dans les deux membres, car on en déduit l'équation $x^3=7x+6$ « pour laquelle il n'y a pas de règle générale ».[1] Par contre $x+1$ est un diviseur commun des deux

[1] C'est un exemple souvent présenté du casus irréductibilis dont Nuñez n'a même pas jugé utile de réfuter la méthode de Tartaglia : il n'a repris du poème de celui-ci que la première partie correspondant à l'équation $x^3+ax=b$ ([6, p. 334r] ; [7, p. 404]) et refuse la méthode présentée car elle implique des calculs de radicaux effrayants

membres de (1), et en divisant les deux membres par ce diviseur[2] on trouve l'équation $x^2 = x + 6$ qui peut se résoudre. Nuñez dit alors que pour pouvoir trouver un diviseur commun il sera utile de mémoriser des produits de polynômes :

> Y para hallar partidor cõmun con menos negocio, seria cosa muy cõueniente componer vna tabla, y guardarla en la memoria, en la qual se multipliq̃.1.co. p̃.1.por.1.co.p̃.1. y por.1.co.p̃.2.y por.1.co.p̃.1.y por.1.co.p̃.2.y ir assi prosiguiendo hasta.1.0.[3]

Puis il dit que pour certains types d'équations, il existe une règle générale qui rend inutile cette mémorisation.

Voici ces types d'équations :

> Y las conjugaciones son aquellas, en las quales cubo y numero, son yguales a cosas, o cosas y numero yguales a cubo, y no seruira la tal Regla q̃ auemos de dar en qualquier conjugacion destas, porque solamente seruira, quando las cosas excedieren al numero en la vnidad, o el duplo de las cosas excediere al numero por el cubo de .2., el qual es.8., o el triplo de las cosas excediere al numero por el cubo de .3., el qual es .27., o el quadruplo de las cosas excediere al numero en el cubo de .4., el qual es .64., y assi por el consiguiente en los otros cubos.

---

pour des équations admettant une racine entière évidente ([6, pp. 340v et 341r] ; [7, p. 412]). Par ailleurs Nuñez refuse les nombres négatifs (« y si entiendo que m̃ 79 es aun menos que nitril, a que llaman debito, esto es mera vanidat y pura contradiction » [6, p. 224r] ; [7, p. 266]).

[2] Bosmans se demande [2, p. 163] si Nuñez a remarqué que $-p$ (p éventuellement positif) est solution d'une équation lorsque $x + p$ divise les deux membres. Bien sûr que non puisque Bosmans lui-même a noté [2, p. 159] que Nuñez refuse les racines négatives.

[3] Il me semble donc que Bosmans place à tort [1, p. 163] ce conseil de Nuñez dans le contexte des exemples qui suivent.

Il s'agit donc d'équations de la forme

$$x^3 = ax + b \tag{2}$$

pour lesquelles il existe p tel que

$$pa = b + p^3. \tag{3}$$

Dès lors, on transforme (2) en

$$\begin{aligned} x^3 + p^3 &= ax + b + p^3 \\ &= ax + ap \end{aligned}$$

et $x + p$ est un diviseur commun des deux membres. Nuñez applique cette méthode à de nombreux cas particuliers dont :

$$x^3 = 7x + 6. \tag{4}$$

On y prend $p = 1$, et cette équation devient

$$x^3 + 1 = 7x + 7,$$

dont $x + 1$ divise les deux membres.

Remarque. Dans *L'Algebra* [1], Bombelli appelle cette astuce la *regola messa dal Cardane* [1, p. 224].

Mentionnons que parmi les auteurs qu'il a étudié, Bombelli cite dans son adresse aux lecteurs « un certo spagnolo » que E. Bortolotti identifie [1, p. 9, note 7] comme étant peut être le Portugais Petro Nuñez. Dans ce traité cette astuce est une application ponctuelle de la décomposition d'une somme de cubes. Tandis que chez Nuñez, elle se place dans le cadre général de la recherche d'un diviseur commun à deux polynômes, et s'applique à des exemples qui ne se ramènent pas tous à la forme 2.

1.3 En conclusion

La méthode de Nuñez est donc la suivante : soit l'équation $A(x) = B(x)$, si les deux membres ont un diviseur commun D de degré positif en x, alors on se ramène à l'équation $A/D = B/D$, sinon on cherche y pour lequel $A+y$ et $B+y$ ont un diviseur commun D de degré positif en x, et on se ramène à l'équation $(A+y)/D = (B+y)/D$. Une aide à la résolution d'une équation est de soustraire ou d'ajouter une même expression aux deux membres. Une méthode depuis Al Kwarizmi est d'ajouter une même expression aux deux membres qui fasse de ceux-ci une même puissance positive de polynômes. *Nuñez doit être celui qui a mis en évidence et dans un cadre général l'intérêt pour la résolution des équations, soit de rechercher un diviseur commun de degré positif des deux membres, soit de transformer ces deux membres de telle façon qu'ils possèdent un tel diviseur commun.* Si l'on interprète alors « sa légitime construction » dans le texte de Stevin comme signifiant « la légitime construction du pgcd », ce texte semble parfaitement justifié.

Stevin a donc répondu à une préoccupation de Nuñez. Mais qu'a-t-il fait de sa réponse ?

2 Le pgcd des polynômes, Simon Stevin, et la résolution des équations

2.1 Dans son *Problème LIII*, Stevin décrit donc son algorithme pour calculer le pgcd de deux polynômes. Remarquons qu'en soulignant l'analogie avec le comportement des nombres entiers, Stevin resouligne dans les faits que ces nombres sont d'une autre nature que les polynômes [11].

2.2 Les applications par Stevin de son algorithme

Je n'en connais que deux :

1. Au *problème LIIII* [10, p. 576], il détermine la forme irréductible d'une fraction rationnelle,

2. Au *problème LXII* (p. 589), cité dans [4] et dans [10, p. 589], mais non repris intégralement dans cet ouvrage, Stevin enumère des méthodes pour abaisser le degré d'une équation. En particulier, si le degré en x des deux membres est positif, diviser par leur pgcd :

- dans la *Reigle 1*, il ramène $2x^4 = 6x^3$ à $2x = 6$,

et surtout :

- dans la *Reigle X* il fait explicitement référence au *Problème LIII* :

  Reigle X. Si deux termes égaux eussent commune mesure algebrique, on les peut covertir par la mesure, en moindre multitude de quantite Z.

  Explication. Soyent $8\boxed{5}+6\boxed{3}$, égales à $12\boxed{4}+20\boxed{3}+9\boxed{2}+15\boxed{1}$; on verra s'ils ont commune mesure par le 53 probleme, 2 se trouve qu'ouy, que la maiene est $4\boxed{3}+3\boxed{1}$; on divisera doncques 2 l'un 2 l'autre terme par $4\boxed{3}+3\boxed{1}$, 2 l'on aura $2\boxed{2}$, égales à $3\boxed{1}+5$.

2.3 Mais dans sa présentation de la théorie des équations du troisième degré, Stevin calcule le p.g.c.d. de deux polynômes, sans appliquer son algorithme

Il s'agit du *Problème LXIX* ([10], pp.615 et suivantes) où Stevin étudie trois cas :

1. l'équation (2) $x^3 = ax + b$, cas qu'il appelle *première différence,*
2. $x^3 = -ax + b$, *deuxième différence,*
3. $x^3 = ax - b$, *troisième différence*, a et b étant toujours positifs.

1. Ce cas contient le *casus irreductibilis* et Stevin refuse l'introduction par Bombelli des nombres imaginaires. L'exemple étudié est

$$x^3 = 30x + 36,$$

et la solution fournie par la méthode de Tartaglia-Cardan est

$$\sqrt[3]{18 + 26i} + \sqrt[3]{18 - 26i}$$

Bien que l'on puisse établir que cette expression vaut aussi 6, Stevin estime que l'on perd son temps en manipulant des expressions dépourvues de sens. Lui n'a pas de temps à perdre et « ceux ausquels plairont tels exemples, il en pourront faire à leur plaisir » ;

2. contrairement à Nuñez, ce deuxième cas ne lui pose pas de problème ;

3. c'est dans ce cas qui contient aussi le casus irreductibilis que Stevin calcule un diviseur commun à deux polynômes :

> *De l'origine de cette troisiesme difference A fin de declairer premierement en general ceste origine, faut savoir, que nous tachons d'ajouter à chaque partie des égales parties donnees, un mesme nombre, tel, qu'alors divisée chaque partie par quelque commun diviseur, que les quotiens soient* $\boxed{2}$ *egale à* $\boxed{1}$ $\boxed{0}$*, desquels la valuer de* 1 $\boxed{1}$*, sera notoire par le* 68 *probleme,...*

Stevin cherche donc un nombre y tel que $x^3 + y$ et $ax - b + y$ aient un diviseur commun de degré positif en x.

Sa démarche, détaillée sur l'équation $x^3 = 7x - 6$ de telle façon que l'on comprenne qu'il s'agit d'un raisonnement général, est alors la suivante [10, p. 626] : un diviseur commun de degré positif en x doit être du premier degré en x.

Il en cherche un de la forme $x+p$ et exprime que ce dernier polynôme divise chaque membre. Le reste de la division euclidienne de x^3+y par $x+p$ est $y-p^3$, donc on doit avoir $y=p^3$. Le reste de la division de $ax+y-b$ par $x+p$ est $y-b-ap$, donc on doit avoir $y=b+ap$. Finalement pour qu'il existe y, il doit exister p tel que (3). Stevin a donc retrouvé *la regola messa dal Cardane*.

Remarque. 1. Si Stevin avait appliqué son algorithme du *Problème LIII*, il aurait effectué la division euclidienne de x^3+y par $ax-b+y$:

$$x^3+y=(ax-b+y)\left(\frac{x^2}{a}-\frac{y-b}{a^2}+\frac{(y-b)^2}{a^3}\right)+\left(y-\left(\frac{y-b}{a}\right)^3\right),$$

et pour que le reste soit nul, il faut que

$$y=\left(\frac{y-b}{a}\right)^3 \tag{5}$$

Si l'on pose $p=(y-b)/a$, alors $ap+b=y=p^3$, et l'on retrouve (3). Ce seul exemple laisse prévoir que l'application de l'algorithme du pgcd conduit d'une part à des calculs pénibles et d'autre part que la condition à laquelle conduiront ces calculs a peu de chance d'être plus simple à traiter que l'équation initiale. On peut conjecturer, mais sans preuves, que Stevin a fait ces constats.

2. En écrivant (5), on a éliminé x entre les polynômes x^3+y et $ax-b+y$. Mais ce n'est pas ce qu'a fait Stevin.

Pour résoudre l'équation (2), la *regola messa dal Cardane* ajoute une variable p et trouve une condition sur a,b et p pour que x^3+p^3 et $ax+b+p^3$ aient un diviseur commun de degré positif en x. Pour retrouver cette *regola*, Stevin ajoute une variable y et trouve une condition pour que x^3+y et $ax+b+y$ aient un diviseur commun de degré positif en x. Cette condition fait intervenir une nouvelle variable p. Il n'a pas éliminé au sens classique du terme y entre les deux polynômes, mais il a trouvé, comme d'ailleurs au moins Nuñez, *en l'ayant explicitement cherché, une condition ne faisant pas intervenir x pour que les polynômes aient un diviseur commun*.

3. Nuñez et Stevin sont d'autant loin de l'élimination classique que leurs œuvres ne semble pas contenir de trace du fait que $x-a$ divise le polynôme f si et seulement si $f(a)=0$. *Mais* si l'on sait cela, alors $x+p$ divise respectivement $A(x)+y$ et $B(x)+y$ si et seulement si $A(-p)+y=0$ et $B(-p)+y=0$. Donc $A(x)+y$ et $B(x)+y$ ont un diviseur commun de la forme $x+p$ si et seulement si $A(-p)=B(-p)$. On rencontre ce type d'expression chez Stevin [10, pp. 642 et suivantes] dans le paragraphe suivant du *Problème LXX* :

> Des solutions que l'on peut faire par $-$ sur les precedens problems.

Stevin y justifie des solutions négatives d'équations. Sa conclusion, telle qu'elle apparaît dans tous les exemples traités, semble être la suivante : soit $A(x)=B(x)$ une équation (à coefficients positifs). Si l'équation $A(-x)=B(-x)$ possède une solution positive s, alors $-s$ est une solution acceptable de $A(x)=B(x)$.

Ce rapprochement ne prouve bien sûr rien, d'autres sont probablement tout aussi frappants, mais on peut tout de même l'énoncer.

2.4 Appendice sur la troisième différence ($x^3=ax-b$)

Stevin y étudie donc l'équation

$$x^3=7x-6 \tag{6}$$

et prouve [10, p. 626] qu'il suffit de trouver p tel que

$$p^3 - 6 = 7p \tag{7}$$

pour ramener (6) à une équation du second degré. Mais alors sa démarche est surprenante : pour résoudre l'équation en p (7), il dit (toujours [10], p. 626) qu'elle est la 9^e^ question du probleme 81 où l'on y prouve que la solution est 3. Stevin ajoute alors 27 aux deux membres de (6), divise les deux nouveaux membres par $x+3$ et obtient l'équation $x^2 - 3x + 9 = 7$ qui admet 2 comme solution. Mais en renvoyant à la 9^e^ question du probleme 81, Stevin semble se moquer du monde : la *Question IX* du *Problème LXXXI* [10, p. 692] est bien celle de résoudre l'équation $x^3 - 6 = 7x$, Stevin transforme cette dernière équation en $x^3 = 7x + 6$ qu'il résout comme ceci : « Et par le 69 probleme $1\boxed{1}$ vaudra 3 ». Il a donc renvoyé au premier cas, et l'équation est justement un *casus irreductibilis* dont il refuse la formule de Tartaglia-Cardan.

3 Je remercie Monsieur Jean Luc Verley pour m'avoir fourni les passages nécessaires du Libro de Algebra (pour ce texte écrit en septembre 1997), Diane de Wouters pour son aide à la traduction de ces passages, avant que Monsieur Christophe Hecque et Mesdemoiselles Virginie Jost et Virginie Matagne procèdent à leurs traductions [5], et Lyane Bouchez pour le soin habituel avec lequel elle a dactylographié et présenté ce texte.

Références

[1] R. BOMBELLI, L'Algebra (1re éd. Bologne 1572), Feltrimelli, Milan, 1966.

[2] H. BOSMANS, Sur le « Libro de algebra » de Pedro Nuñez, Bibliotheca Mathematica, 3e série, t. 8, Leipzig 1907–1908, pp. 154–169.

[3] H. BOSMANS S.J., L'Algèbre de Pedro Nuñez, An. Sc. Acad. Pol. Porto, vol. 3, 1908, pp. 222–271.

[4] H. BOSMANS, Remarques sur l'« Arithmétique » de Simon Stevin (suite), Mathesis, 1922, pp. 275–281.

[5] C. HUCQUE, L'algèbre de Pedro Nunez et le plus grand commun diviseur des polynômes, Mémoire de licence, Université de Mons-Hainaut, 1998.

[6] P. NUÑEZ, Libro de algebra en arithmetica y geometria, ed. J. Steelsius, Anvers, 1567.

[7] P. NUÑEZ, Obras, vol. VI, Libro de Algebra en arithemtica y geometria, Academia des Ciencias de Lisboa, 1947.

[8] P. NUÑEZ (1502–1578), His Lost Algebra and other Discoveries, Edited and Translated by John R. C. Martyn, Peter Lang (American University studies), 1996.

[9] S. STEVIN, L'Arithmétique, ed. Plantin, Leyde, 1585.

[10] The principal works of Simon Stevin, vol.II b (vol. II ed. by D. J. Struik), Amsterdam, C. V. Swets & Zeitlinger, 1958.

[11] J. P. TIGNOL, Galoi's theory of algebrics equations, New York, Logman, 1988.

Prépublications récentes

[1] *Maurice Boffa's 60th Birthday Workshop*, March 23, 2000.

[2] Catherine FINET, *Perturbed minimization principles in partially ordered Banach spaces*, June 29, 2000.

[3] Arnaud MAES, Corinne CERF, *A family of brunnian links based on Edwards' construction of Venn diagrams*, July 15, 2000.

[4] Catherine FINET & Lucas QUARTA & Christophe TROESTLER, *A new notion of lower semi-continuity and applications to vector optimization*, January 19, 2000.

[5] Gilles GODEFROY, *Montons les degrés*, 8 mars 2001.

[6] Paul VAN PRAAG, *Quaternions as reflexive skew fields*, 22 mars 2001.

[7] Maurice BOFFA, *Théorie des ensembles et dualité*, 17 avril 2001.

Les prépublications de l'*Institut de Mathématique et d'Informatique* sont consultables et téléchargeables sur le site web : `http://www.umh.ac.be/math/preprints/`. Si vous désirez recevoir des copies papier, veuillez écrire à l'adresse suivante :

Institut de Mathématique et d'Informatique
Université de Mons-Hainaut
« Le Pentagone », 6 av. du champ de Mars
7000 Mons, Belgique