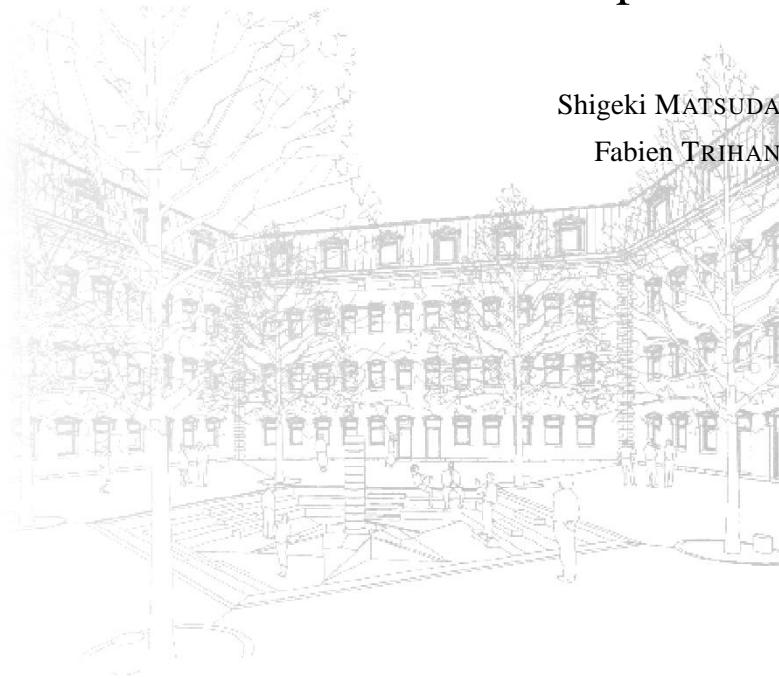


Prépublication #14
9 septembre 2003

Image directe supérieure et unipotence

Shigeki MATSUDA
Fabien TRIHAN



Université de Mons-Hainaut
Institut de Mathématique

Tél : +32 65 37 35 07 — Fax : +32 65 37 33 18
Web : <http://www.umh.ac.be/math/institut>

Image directe supérieure et unipotence

Shigeki MATSUDA

matsu@math.s.chiba-u.ac.jp
Department of Mathematics
and Informatics
University, Yayoi, Chiba
CHIBA 263, Japan

Fabien TRIHAN

fabien.trihan@umh.ac.be
Université de Mons-Hainaut,
Institut de Mathématique,
“Le Pentagone”
Avenue du Champ de Mars, 6
7000 Mons, Belgium

Résumé. Let X be a proper smooth curve over a perfect field of characteristic $p > 0$ and U an open dense subscheme of X . We prove that convergent F -isocrystals on U are overconvergent under the condition that they are overconvergent at each point in $X \setminus U$. Using this criterion, we show that the higher direct images $R^i f_{\text{crys}*} \mathcal{O}_V$ by a proper smooth morphism of schemes $f : V \rightarrow U$ are overconvergent.

Mathematics Subject Classification (2000) : 14F30.

1 Introduction Soient U/k une courbe affine et lisse sur un corps parfait de caractéristique $p > 0$, X/k une compactification lisse de U et $f : V \rightarrow U$ un morphisme propre et lisse. En utilisant un critère de surconvergence dont l'idée initiale revient à de Jong (cf. [9]) et grâce aux résultats (locaux) de Kedlaya [13], nous montrons que les images directes supérieures $R^i f_* \mathcal{O}_V$ sont surconvergentes (répondant ainsi dans le cas d'une courbe affine et lisse à une conjecture de [3]). En particulier, leurs groupes de cohomologie sont de dimension finie et vérifient la dualité de Poincaré. Enfin, nous montrons que le théorème de monodromie p -adique local de [1], [14] et [17] permet de déduire que tout F -isocristal surconvergent sur U provient après une éventuelle extension finie étale d'un F -log-isocristal.

Nous remercions Kiran Kedlaya pour nous avoir indiqué comment obtenir des résultats de descente de modules via ses lemmes de factorisations de matrices.

2 Notations Soit k un corps parfait de caractéristique p . On note W l'anneau des vecteurs de Witt de k , \mathcal{O} une extension finie de W et K_0 (respectivement K) le corps des fractions de W (resp. \mathcal{O}). On suppose le corps K muni d'un Frobenius σ relevant le Frobenius canonique de K_0 . Pour une indéterminée x , on notera :

$$\begin{aligned}
 S &:= \mathcal{O}_K[[x]] \otimes_{\mathcal{O}_K} K \\
 \mathcal{A} &:= \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \mid a_i \in K, |a_i| \rho^i \rightarrow 0 \ (i \rightarrow \infty), \text{ for any } 0 < \rho < 1 \right\} \\
 \mathcal{H} &= \left\{ a = \sum_{i=0}^{-\infty} a_i x^i \mid a_i \in K, |a_i| \rightarrow 0 \ (i \rightarrow -\infty) \right\} \\
 \mathcal{H}^\dagger &= \left\{ a \in \mathcal{H} \mid |a_i| r^i \rightarrow 0 \ (i \rightarrow -\infty) \text{ pour un certain } 0 < r < 1 \right\}
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{E} = \left\{ a = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_i x^i \mid a_i \in K, \sup_i |a_i| < \infty, \sum_{i=0}^{-\infty} a_i x^i \in \mathcal{H} \right\}$$

$$\mathcal{E}^\dagger = \left\{ a \in \mathcal{E} \mid \sum_{i=0}^{-\infty} a_i x^i \in \mathcal{H}^\dagger \right\}$$

\mathcal{E} (resp. \mathcal{E}^\dagger) est un corps de valuation discrète complet (resp. un corps de valuation discrète hensélien) de corps résiduel $k((x))$. \mathcal{H} (resp. \mathcal{E}) est fidèlement plat sur \mathcal{H}^\dagger (resp. \mathcal{E}^\dagger) et on a :

$$\mathcal{H} \subset \mathcal{E} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^\dagger = \mathcal{E}^\dagger \cap \mathcal{H}.$$

Notons R l'un des anneaux définis ci-dessus ou encore $R_{x,K}$ si l'on veut préciser la variable et le corps des coefficients. Alors R est muni d'une \mathcal{O} -dérivation (cf [21]) :

$$d : R \rightarrow \omega_R := R \cdot \frac{dx}{x}.$$

Nous fixons sur le corps \mathcal{E} un endomorphisme Frobenius σ , dit canonique, induisant un Frobenius sur S et donc aussi un Frobenius sur \mathcal{A} et \mathcal{E}^\dagger , également noté σ (un tel Frobenius existe : on peut prendre le morphisme qui agit sur les coefficients par le Frobenius de K et qui envoie la variable x sur x^p). Toute extension finie séparable, induit une extension finie non-ramifiée $\mathcal{E}_{y,L}/\mathcal{E}_{x,K}$, où L est l'unique extension non-ramifiée de K de corps résiduel l . Les opérateurs Frobenius et dérivation sur \mathcal{E}_K s'étendent donc naturellement à \mathcal{E}_L . Si $y = x$, le Frobenius prolongeant celui de \mathcal{E}_K induit un Frobenius sur les autres anneaux. Sinon, ce n'est pas le cas. On peut néanmoins munir $\mathcal{E}_{y,L}$ de son Frobenius canonique. Rappelons ([21]) qu'un (φ, ∇) -module sur R consiste en la donnée d'un R -module libre de rang fini M_R muni d'une connexion \mathcal{O} -linéaire :

$$\nabla : M_R \rightarrow M_R \otimes \omega_R$$

telle que $\nabla(am) = da \otimes m + a\nabla(m)$ pour tout $a \in R$ et tout $m \in M_R$.
Le module est d'autre part muni d'un endomorphisme σ -linéaire :

$$\varphi : M_R \rightarrow M_R$$

tel que $\varphi(M_R)$ engendre M_R et :

$$\nabla\varphi = (\sigma \otimes \varphi)\nabla \quad (1)$$

Quitte à choisir une base $e = (e_1, \dots, e_r)$ de M_R , on peut associer à ∇ (resp. à φ) une matrice $C \in \mathcal{M}_r(R)$ (resp. $A \in GL_r(R)$) et la relation (1) est alors équivalente à :

$$\delta(A) + CA = \delta(\sigma(x))/\sigma(x)A\sigma(C), \quad (2)$$

où $\delta = x \cdot \left(\frac{dx}{x}\right)$.

3 Soit X/k une courbe affine et lisse, x un point fermé de X et $U = \text{Spec}A_0 = X \setminus x$. Soit A/\mathcal{O}_K une algèbre lisse relevant A_0 et notons $A_K = A \otimes_{\mathcal{O}_K} K$. On note encore x le paramètre local de X en le point x et K_x l'extension non ramifiée de K de corps résiduel le corps $k(x)$. Alors il existe d'après [7], 3 une injection $A_K \hookrightarrow A_0(x)$, avec

$$A_0(x) = \left\{ a = \sum_{i>-\infty}^{+\infty} a_i x^i \mid a_i \in K_x, a \text{ convergeant pour } 0 < |x| < 1 \right\}.$$

On en déduit une injection $A_K \hookrightarrow \mathcal{E}_x := \mathcal{E}_{x, K_x}$. Et ainsi, puisque que \mathcal{E}_x est complet, cette dernière induit une injection $\hat{A}_K \hookrightarrow \mathcal{E}_x$. Notons \mathcal{R}_x l'anneau de Robba des séries convergeant sur une couronne $r < |x| < 1$ pour un certain r . On a par définition

$$\mathcal{E}_x^\dagger = \mathcal{R}_x \cap \mathcal{E}_x.$$

Alors d'après [8], 7.3, on a une injection canonique de

$$A_K^\dagger = \lim_V \Gamma(V, \mathcal{O}_V) \rightarrow \lim_V \Gamma(V \cap]x[, \mathcal{O}_V) = \mathcal{R}_x,$$

où la limite inductive est pris sur l'ensemble des voisinages stricts de $]U[$ dans $]X[$. De cette manière on a en fait un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \hat{A}_K & \hookrightarrow & \mathcal{E}_x \\ \uparrow & & \uparrow \\ A_K^\dagger & \hookrightarrow & \mathcal{E}_x^\dagger \end{array}$$

où $A_K^\dagger = \mathcal{E}_x^\dagger \cap \hat{A}_K$ d'après [6], 4.7.2. On peut munir \hat{A}_K et A_K^\dagger de Frobenius et de dérivations tels que le carré commutatif précédent soit compatible à ces opérateurs (voir par exemple [22], p. 414).

Rappelons enfin que la notion de (φ, ∇) -modules sur \hat{A}_K (resp. A_K^\dagger) correspond à celle de F -isocristaux convergents (resp. surconvergents) sur U/K ([2], 2.5).

4 Soit une courbe lisse U/k , X/k une compactification propre et lisse de U et $D = X \setminus U$. Pour tout $x \in D$, soit X_x un ouvert affine de X tel que $X_x \cap D = \{x\}$ et $U_x = X_x \setminus \{x\} = \text{Spec } A_0$. On note comme précédemment A/\mathcal{O} un relèvement lisse de A_0/k . Soit E un F -isocristal convergent sur U . Pour tout $x \in D$, $E|_{U_x}$ correspond à un (φ, ∇) -module sur \hat{A}_K et on note E_x , le (φ, ∇) -module sur \mathcal{E}_x obtenu par extension des scalaires. Nous nous proposons de démontrer le résultat suivant :

Théorème 1. *Si pour tout $x \in D$, E_x descend (comme (φ, ∇) -module) à \mathcal{E}_x^\dagger , alors E est surconvergent.*

Définition 2. Sous les hypothèses et notations du théorème, nous dirons que E est unipotent en x si le (φ, ∇) -module E_x^\dagger sur \mathcal{E}_x^\dagger est unipotent en x après tensorisation par \mathcal{R}_x .

Avant de donner la démonstration de ce résultat nous en donnons un corollaire :

Corollaire 3. *Soient k un corps parfait de caractéristique p , U/k une courbe affine et lisse et $f : V \rightarrow U$ un morphisme propre et lisse. Supposons que K soit d'indice de ramification $e \leq p - 1$. Alors les F -isocristaux convergents $R^i f_* \mathcal{O}_{V/K}$ de [19] sont surconvergents.*

Démonstration. Nous avons un morphisme de topos

$$f_{\text{crys}} : (V/\mathcal{O}_K)_{\text{crys}} \rightarrow (U/\mathcal{O}_K)_{\text{crys}}$$

et via l'équivalence de catégories entre les F -isocristaux convergents sur U/K et les F -cristaux définis à isogénie près (voir [2], 2.4), l'isocristal $R^i f_* \mathcal{O}_{V/K}$ correspond à $R^i f_{\text{cris},*} \mathcal{O}_{V/\mathcal{O}_K}$. Soit X une compactification lisse de U et pour tout $x \in D = X \setminus U$. En utilisant le théorème de changement de base cristallin [5], 7.2 associé au diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} V_x & \hookrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec Frac}(\hat{\mathcal{O}}_{X,x}) & \hookrightarrow & U \end{array}$$

nous en déduisons le F -cristal $E_x = R^i f_{x,*} \mathcal{O}_{V_x}$ (à isogénie près) sur $\text{Frac}(\hat{\mathcal{O}}_{X,x})$ qui correspond d'après [4], 1 au (φ, ∇) -module sur \mathcal{E}_x déduit du (φ, ∇) -module sur \hat{A}_K associé à $R^i f_* \mathcal{O}_{V/K}$ par l'extension de scalaires $\hat{A}_K \subset \mathcal{E}_x$. On doit alors montrer que ce dernier descend à \mathcal{E}_x^\dagger pour tout $x \in D$ ce qui résulte de [13], 6.1 et le théorème permet alors de conclure. En faite, nous ne doutons pas que ce résultat puisse s'étendre à K plus général quitte à développer la théorie convergente sur des bases formellement de type fini et à remplacer le théorème de changement de base cristallin par son analogue convergent. \square

Nous commençons par démontrer le résultat suivant, plus faible que le théorème précédent. Nous conservons les notations de 4.

Proposition 4. *Si pour tout $x \in D$, E_x descend à $S_{K_x} (\subset \mathcal{E}_x)$ en tant que (φ, ∇) -module, la connexion étant à pôles logarithmiques le long de $x = 0$, alors E s'étend à un F -isocrystal sur X muni de la log-structure induite par le diviseur $X \setminus U$. En particulier, E est surconvergent.*

Démonstration. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} U_x & \hookrightarrow & X_x \\ \uparrow & & \uparrow \\ W_x = \text{Spec Frac}(\hat{\mathcal{O}}_{X,x}) & \hookrightarrow & D_x = \text{Spec } \hat{\mathcal{O}}_{X,x} \end{array}$$

On a $\hat{\mathcal{O}}_{X,x} \simeq k(x)[[x]]$. On munit D_x de la log-structure induite par l'idéal maximal (x) et on note $D_x^\#$, le log-schéma ainsi défini. Avec ces notations, les (φ, ∇) -modules sur S_{K_x} à pôles logarithmiques le long de x correspondent aux F -cristaux sur $D_x^\#$ définis à isogénie près. On note également $X_x^\#$, le log-schéma X_x muni de la log-structure induite par le point x . Par hypothèse, E_x provient d'un F -(iso)cristal sur $D_x^\#$ noté $E_{D_x^\#}$, pour tout $x \in D$ tel que $E|_{W_x} \simeq E_{D_x^\#}|_{W_x}$. En terme de (φ, ∇) -modules, ceci revient à dire qu'il existe un (φ, ∇) -module $E_{D_x^\#}$ sur S_{K_x} tel que

$$E_{D_x^\#} \otimes_{S_{K_x}} \mathcal{E}_x \simeq E_x \simeq E|_{U_x} \otimes_{\hat{A}_K} \mathcal{E}_x.$$

D'après [11], 4.4.1 cette dernière condition permet de recoller la donnée du F -isocrystal $E|_{U_x}$ sur U_x et du F -cristal sur $D_x^\#$ en un F -isocrystal E_x^{\log} sur $X_x^\#$ tel que $E_x^{\log}|_{U_x} \simeq E|_{U_x}$ et $E_x^{\log}|_{D_x^\#} \simeq E_{D_x^\#}$. Si $X_x = \text{Spec } B_0$ et B/W est un relèvement lisse de B_0/k , on a d'après [21], 6.1.1

$$\hat{B}_K = \hat{A}_K \cap S_{K_x} \hookrightarrow \hat{A}_K \cap \mathcal{E}_x^\dagger = A_K^\dagger \hookrightarrow \hat{A}_K.$$

Comme le (φ, ∇) -module sur \hat{A}_K induit par $E|_{U_x}$ descend à \hat{B}_K , il descend en particulier à A_K^\dagger et définit ainsi un F -isocrystal E_x^\dagger sur U_x surconvergent le long de x , pour tout $x \in D$. On vérifie enfin que la famille d'isocristaux $(E_x^\dagger)_{x \in D}$ (resp. $(E, E_x^{\log})_{x \in D}$) se recolle en un F -isocrystal surconvergent E^\dagger sur U (resp. en un F -isocrystal E^{\log} sur X muni de la log-structure induite par D), puisque sur chaque intersection $U_x \cap U_{x'}$, la restriction de E_x^\dagger et $E_{x'}^\dagger$ (resp. E_x^{\log} et $E_{x'}^{\log}$) à cet ouvert n'est autre que la restriction de l'isocrystal convergent E à $U_x \cap U_{x'}$. On remarque enfin que par construction, E^\dagger n'est autre que l'image par le foncteur de [15] du F -log-isocrystal E^{\log} . \square

Nous aurons également besoin du lemme suivant :

Lemme 5. *On considère le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^\dagger & \hookrightarrow & \mathcal{R} \\ \uparrow & & \uparrow \\ S & \hookrightarrow & \mathcal{A} \end{array}$$

Soit $M_{\mathcal{E}^\dagger}$ un (φ, ∇) -module sur \mathcal{E}^\dagger . On note $M_{\mathcal{R}}$ le (φ, ∇) -module sur \mathcal{R} obtenu par extension des scalaires. Alors $M_{\mathcal{E}^\dagger}$ descend à S si et seulement si $M_{\mathcal{R}}$ descend à \mathcal{A} .

Démonstration. Soit $M_{\mathcal{A}}$ un (φ, ∇) -module sur \mathcal{A} tel que $M_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{R} \simeq M_{\mathcal{R}}$. Comme \mathcal{A} est un anneau de Bezout, $M_{\mathcal{A}}$ est un \mathcal{A} -module libre de rang fini. Considérons une base $a = (a_1, \dots, a_n)$ de $M_{\mathcal{A}}$ sur \mathcal{A} et une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ de $M_{\mathcal{E}^\dagger}$. Soit P une matrice à coefficients dans \mathcal{R} telle que $e = aP$. Alors par [12], 4.2.4, il existe une matrice P_1 à coefficients dans \mathcal{A} et une matrice P_2 à coefficients dans \mathcal{E}^\dagger telles que $P = P_1 P_2$ et P_1 est inversible sur \mathcal{A} . Comme P est inversible,

$\det P_2 \neq 0$ et P_2 est inversible sur \mathcal{E}^\dagger . Soit $f = aP_1 = eP_2^{-1}$ et M_S un S -module libre engendré par f . Puisque $M_S \otimes_S \mathcal{E}^\dagger = M_{\mathcal{E}^\dagger}$ et $M_S \otimes_S \mathcal{A} = M_{\mathcal{A}}$, M_S a une structure de (φ, ∇) -module sur S compatible avec celle de $M_{\mathcal{E}^\dagger}$ et $M_{\mathcal{A}}$. \square

Remarque 6. Le lemme précédent montre que si E^\dagger est un F -isocrystal unipotent sur U , en tout point $x \in X \setminus U$, le (φ, ∇) -module E_x^\dagger sur \mathcal{E}_x^\dagger admet un réseau sur S_{x, K_x} . Ainsi, E^\dagger est l'image par la construction [15] d'un F -isocrystal sur $X^\#$ d'après la preuve de la proposition 1. Réciproquement, il est clair que l'image du foncteur de [15] restreint aux F -log-cristaux non-dégénérés définis à isogénie près est dans la catégorie des F -isocristaux surconvergens unipotents. Autrement dit, nous avons démontré que l'image essentielle du foncteur défini dans [15], qui associe à tout F -(iso)cristal sur $X^\#/K$ un F -isocrystal surconvergent sur U consiste en les F -isocristaux surconvergens unipotents.

5 Nous démontrons à présent le théorème 1. Sous l'hypothèse du théorème, il existe un (φ, ∇) -module E_x^\dagger sur \mathcal{E}_x^\dagger tel que $E_x^\dagger \otimes \mathcal{E}_x \simeq E_x$. D'après [1] (ou encore [14],[17]), son extension à l'anneau de Robba est quasi-unipotente. Il existe alors d'après [21], 6.1.6, un morphisme fini $Y \rightarrow X$ et un ouvert non-vide V de U tels que $f_V : f^{-1}(V) \rightarrow V$ soit étale et $f_V^*(E)$ soit unipotent (au sens de la définition de (c)) en chaque point de $y \in Y \setminus f^{-1}(V)$ au-dessus de $x \in X \setminus V$. Un argument dû à N. Katz (voir la remarque 6.1.7 de [21]) nous permet de dire que si le nombre de points géométriques de $X \setminus U$ est plus grand que 1, on peut choisir $V = U$ et se ramener à montrer la surconvergence de E dans le cas où celui-ci est unipotent grâce au théorème de descente finie étale de [10]. Remarquons que l'extension $\mathcal{E}_y := \mathcal{E}_{y, L_y} / \mathcal{E}_x$ (où L_y est l'extension non-ramifiée de K_x de corps résiduel le corps résiduel de $\text{Frac}(\hat{\mathcal{O}}_{Y, y})$) est non-ramifiée mais que l'extension du Frobenius de \mathcal{E}_x

à \mathcal{E}_y peut ne pas induire de Frobenius sur S_{y,L_y} car le paramètre local en y sera en général un polynôme en le paramètre local en x . Cependant, on peut grâce à [21], 3.4.10, se ramener aux hypothèses de (a), quitte à changer le Frobenius de E_y . Le (φ, ∇) -module sur l'anneau de Robba induit par E_y^\dagger admet d'après [21], 4.2.1 (2) un réseau sur S_{y,L_y} et donc également un réseau sur \mathcal{A}_y . On déduit alors du lemme que E_y^\dagger admet un réseau sur S_{y,L_y} et l'assertion résulte alors de la proposition 4.

Supposons à présent que $X \setminus U$ est réduit à un point. Si la courbe X est de genre strictement positif, alors il existe un recouvrement (non-trivial) fini étale de X ce qui permet de nous ramener au cas précédent. Sinon il existe un recouvrement fini $X' \rightarrow X$, étale au-dessus de U tel que X' soit de genre strictement positif : en effet, considérons un recouvrement de type Artin-Schreier $u^p - u = T^n$ tel que p ne divise pas n . Alors, d'après la formule de Hurwitz (voir par exemple [18] p. 187), nous avons une équation

$$2 - 2g_{X'} = 2p - (p - 1)(n + 1)$$

où $g_{X'}$ est le genre de X' . Il suffit alors de choisir n assez grand pour voir que $g_{X'}$ est non nul et nous sommes ainsi ramené au cas précédent.

Dans le cas particulier où $U = \text{Spec} k[x^{-1}]$, le théorème revient au résultat suivant qui était conjecturé par [9].

Proposition 7. *Soit $M_{\mathcal{H}_K}$ un (φ, ∇) -module sur \mathcal{H}_K . On note $M_{\mathcal{E}_K}$ le (φ, ∇) -module sur \mathcal{E}_K obtenu par extension des scalaires. Alors $M_{\mathcal{H}_K}$ descend à \mathcal{H}_K^\dagger si et seulement si $M_{\mathcal{E}_K}$ descend à \mathcal{E}_K^\dagger .*

Nous en donnons une autre preuve qui permet de mieux comprendre ce qui se passe au niveau des modules sur les anneaux de séries formelles.

Démonstration. Soient

$$\hat{A}_K = \left\{ \sum_{-\infty}^{\infty} a_i x^i \mid a_i \in K, |a_i| \rightarrow 0 \ (i \rightarrow \pm\infty) \right\},$$

$$A_K^\dagger = \left\{ \sum_{-\infty}^{\infty} a_i x^i \mid a_i \in K, |a_i| r^{|i|} \rightarrow 0 \text{ pour un certain } r > 1 \right\}.$$

Avec ces notations, on a un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_K & \hookrightarrow & \hat{A}_K \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{H}_K^\dagger & \hookrightarrow & A_K^\dagger \end{array}$$

Nous montrons tout d'abord que si $M_{\mathcal{E}}$ descend à \mathcal{E}^\dagger alors $M_{\hat{A}_K} := M_{\mathcal{H}} \otimes_{\mathcal{H}} \hat{A}_K$, correspondant au F -isocristal convergent sur \mathbf{G}_m induit par $M_{\mathcal{H}}$, est surconvergent, i.e. descend à A_K^\dagger . Il est clair que $M_{\hat{A}_K} \otimes_{\hat{A}_K} \mathcal{E} = M_{\mathcal{E}}$ descend à \mathcal{E}_K^\dagger . On remarque alors que l'inclusion composée :

$$\mathcal{H}_K \subset \hat{A}_K \subset \mathcal{E}_{\frac{1}{x}, K}$$

coïncide avec la composition

$$\mathcal{H}_K \subset \mathcal{E}_{\frac{1}{x}, K}^\dagger \subset \mathcal{E}_{\frac{1}{x}, K}$$

si bien que $M_{\hat{A}_K} \otimes_{\hat{A}_K} \mathcal{E}_{\frac{1}{x}, K}$ descend au-dessus de $\mathcal{E}_{\frac{1}{x}, K}^\dagger$ en le (φ, ∇) -module $M_{\hat{A}_K} \otimes_{\hat{A}_K} \mathcal{E}_{\frac{1}{x}, K}^\dagger$. Autrement dit le F -isocristal sur \mathbf{G}_m induit par $M_{\mathcal{H}_K}$ vérifie les hypothèses du théorème et l'on démontre de la même manière (nous sommes dans le cas où $X \setminus U$ a deux points fermés !) que celui-ci est surconvergent. Ainsi, il existe un (φ, ∇) -module sur $M_{A_K^\dagger}$ tel que $M_{A_K^\dagger} \otimes_{A_K^\dagger} \hat{A}_K \simeq M_{\mathcal{H}_K} \otimes_{\mathcal{H}_K} \hat{A}_K$ comme (φ, ∇) -modules. Comme A_K^\dagger est un anneau principal (voir par exemple [16],

8.6), $M_{A_K^\dagger}$ est un A_K^\dagger -module libre de rang fini. Considérons une base $a = (a_1, \dots, a_n)$ de $M_{A_K^\dagger}$ sur A_K^\dagger et une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ de $M_{\mathcal{H}_K}$ sur \mathcal{H}_K . Soit P une matrice à coefficients dans \hat{A}_K telle que $a = eP$. Alors par [12], 4.1.3 il existe une matrice inversible $Q \in \mathrm{GL}_n(K[x, \frac{1}{x}])$ telle que PQ soit à coefficients entiers et telle que $|PQ - 1| < 1$. Par [12], 4.1.1, il existe une matrice P_1 à coefficients dans \mathcal{H}_K et une matrice P_2 à coefficients dans S_K telles que $PQ = P_1P_2$ et $P_1 = 1 + \sum_{i>0} A_i x^{-i}$ où $A_i \in \mathcal{O}_K$. (Nous regardons x comme $\frac{1}{x}$ dans le lemme de [12], 4.1.1.) Alors $\det P_1$ est invertible dans \mathcal{H}_K et ainsi P_1 est invertible sur \mathcal{H}_K . D'autre part, QP_2^{-1} est invertible sur \mathcal{E}_K^\dagger car le déterminant est non nul. Considérons alors $f = aP_1 = eQP_2^{-1}$ et soit $M_{\mathcal{H}_K^\dagger}$ le \mathcal{H}_K^\dagger -module libre engendré par f . Comme $M_{\mathcal{H}_K^\dagger} \otimes_{\mathcal{H}_K^\dagger} \mathcal{E}_K^\dagger = M_{\mathcal{E}_K^\dagger}$ et $M_{\mathcal{H}_K^\dagger} \otimes_{\mathcal{H}_K^\dagger} A_K^\dagger = M_{A_K^\dagger}$, $M_{\mathcal{H}_K^\dagger}$ a une structure de (φ, ∇) -module sur \mathcal{H}_K^\dagger compatible avec celle de $M_{\mathcal{E}_K^\dagger}$ et $M_{A_K^\dagger}$. \square

Pour finir, le théorème 1 a pour corollaire le résultat suivant qui précise le resultat conjecturé par Crew dans [8] :

Corollaire 8. *Nous conservons les hypothèses et notations du théorème. Si E^\dagger est un F -isocrystal surconvergent sur U alors il existe un recouvrement fini $\pi : X' \rightarrow X$ et étale Galois de groupe G au-dessus de U (i.e. $U' := \pi^{-1}(U) \rightarrow U$ est fini étale) tel que π^*E^\dagger s'étendent en un F -isocrystal E' sur X' muni de la log-structure induite par $X' \setminus U'$. Notons $X'^{\#}$ le log-schéma ainsi défini. On a alors*

$$H_{\mathrm{rig}}^i(U/K, E^\dagger) \simeq (H_{\mathrm{crys}}^i(X'^{\#}/W, E') \otimes K)^G.$$

Démonstration. Nous avons montré dans la preuve du théorème 1 que [21], 6.1.7 reste valable sans supposer le nombre de points géométriques dans $X \setminus U$ supérieur à 1. Ainsi, le théorème de monodromie

p -adique local de [1] (ou [14], [17]) implique que l'isocrystal devient unipotent après une éventuelle extension finie étale. Le fait que l'isocrystal se prolonge en un log-cristal résulte alors de la proposition 4. L'assertion sur leur cohomologie respective résulte immédiatement de [20], 4.7. \square

References

- [1] André, Y., Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p -adique, *Invent. Math.* 148 (2002), no. 2, 285–317.
- [2] Berthelot, P., Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre. Première partie, Prépublication IRMAR 96-03, consultable à l'adresse électronique suivante : <http://name.math.univ-rennes1.fr/pierre.berthelot/>.
- [3] Berthelot, P. Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique p . *Introductions aux cohomologies p -adiques* (Luminy, 1984). *Mém. Soc. Math. France (N.S.)* No. 23 (1986).
- [4] Berthelot, P. et Messing, W., Théorie de Dieudonné cristalline. III. Théorèmes d'équivalence et de pleine fidélité. *The Grothendieck Festschrift, Vol. I*, 173–247, *Progr. Math.*, 86, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [5] Berthelot, P. et Ogus A., *Notes on crystalline cohomology*. Princeton University Press, Princeton, N.J. ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1978.
- [6] Crew R., *F -isocrystals and p -adic representations*, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vol. 46 (1987).

- [7] Crew R., The differential Galois theory of regular singular p -adic differential equations, *Math. Ann.* 305, 45-64 (1996).
- [8] Crew R., Finiteness theorems for the cohomology of an overconvergent isocrystal on a curve, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, 4^e série, t. 31, 1998, p. 717-763.
- [9] De Jong A.J., Barsotti-Tate groups and crystals, *Doc. Math. J. DMV*, Extra volume ICM 1998, II, 259-265.
- [10] Etesse, J.-Y., Relèvement de schémas abéliens, F -isocristaux et fonctions L . *J. Reine Angew. Math.* 535 (2001), 51–63.
- [11] Kato K. et Trihan F., On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer in positive characteristic, to appear in *Inv. Math.*
- [12] Kedlaya K., Descent theorems for overconvergent F -crystals, thèse, consultable à l'adresse électronique suivante : <http://www-math.mit.edu/~kedlaya/math/>.
- [13] Kedlaya K., Descent of morphisms of overconvergent F -crystals, consultable à l'adresse électronique suivante : <http://www-math.mit.edu/~kedlaya/math/>.
- [14] Kedlaya K., A p -adic local monodromy theorem, preprint, to appear in *Annals of Mathematics*.
- [15] Le Stum B. et F. Trihan, Log-cristaux et surconvergence, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 51 (2001), no. 5, 1189–1207.
- [16] Matsuda S., Katz correspondence for quasi-unipotent overconvergent isocrystals. *Compositio Math.* 134 (2002), no. 1, 1–34.
- [17] Mebkhout Z., Analogue p -adique du théorème de Turrittin et le théorème de la monodromie p -adique. *Invent. Math.* 148 (2002), no. 2, 319–351.
- [18] Milne, James S., *Etale cohomology*. Princeton Mathematical Series, 33. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.

- [19] Ogus A., F -isocrystal and de Rham cohomology II, Duke Math. J., vol. 51, No 4, 1984.
- [20] Trihan, F., Fonction L de Hasse-Weil d'une variété abélienne sur un corps de fonction algébrique à réduction semi-stable, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 9 (2002), no. 2, 279–301.
- [21] Tsuzuki N., Slope filtration of quasi-unipotent overconvergent isocrystals, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 48, 2 (1998), 379-412.
- [22] Tsuzuki, Nobuo Morphisms of F -isocrystals and the finite monodromy theorem for unit-root F -isocrystals. Duke Math. J. 111 (2002), no. 3, 385–418.

Prépublications récentes

[6] Paul VAN PRAAG, *Quaternions as reflexive skew fields*, 22 mars 2001.

[7] Maurice BOFFA, *Théorie des ensembles et dualité*, 17 avril 2001.

[8] Paul VAN PRAAG, *Pedro Nuñez, Simon Stevin, et le plus grand commun diviseur des polynômes*, 17 avril 2001.

[9] TROESTLER C., *Equivalence of BSS scalar- and vector-recursion*, June 4, 2001.

[10] Christian MICHAUX & Adem OZTURK, *Quantifier Elimination following Muchnik*, April 11, 2002.

[11] Christian MICHAUX & Cédric RIVIÈRE, *Axiomatisation à la Pierce-Pillay pour les corps ordonnés différentiellement clos*, 4 juillet 2002.

[12] Catherine FINET & Lucas QUARTA, *Some remarks on M-ideals and Strong Proximality*, October 12, 2002.

[13] Fabien TRIHAN, *Holonomie des \mathcal{D} -modules arithmétiques associés à des F -isocristaux surconvergents sur des courbes lisses*, 2 juillet 2003.

Les prépublications de l'*Institut de Mathématique* sont consultables et téléchargeables sur le site web : <http://www.umh.ac.be/math/preprints/>. Si vous désirez recevoir des copies papier, veuillez écrire à l'adresse suivante :

Institut de Mathématique
Université de Mons-Hainaut
« Le Pentagone », 6 av. du champ de Mars
7000 Mons, Belgique