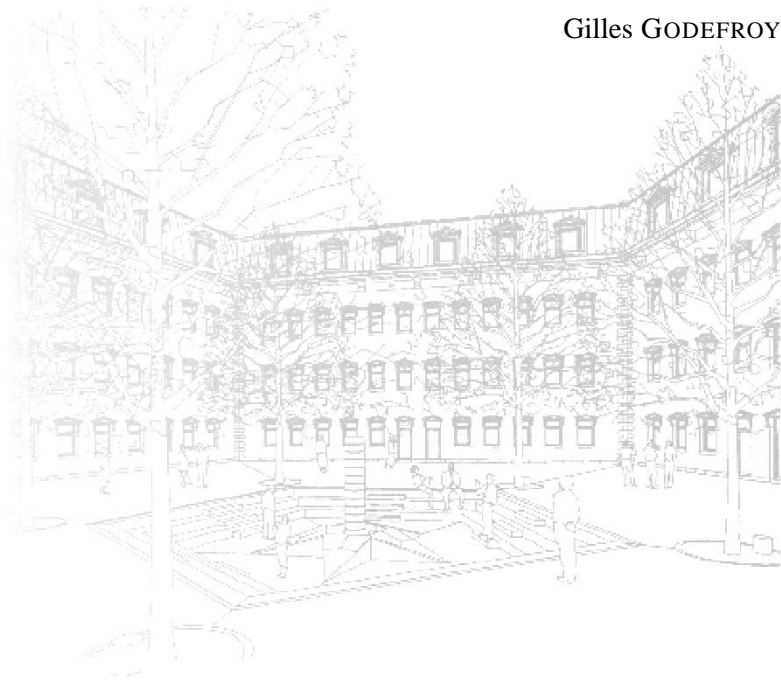


Prépublication #5
8 mars 2001

Montons les degrés

Gilles GODEFROY



Institut de Mathématique et d'Informatique
Université de Mons-Hainaut

Tél : +32 65 37 35 07 — Fax : +32 65 37 33 18

Web : <http://www.umh.ac.be/math/institut>

Montons les degrés

Gilles Godefroy

1 Introduction

Je remercie l'Université de Mons-Hainaut, et en particulier Catherine Finet, pour m'avoir invité à donner cette conférence à l'occasion du vingt-cinquième anniversaire de la première promotion de mathématiques.

Nous allons explorer ensemble les découvertes mathématiques, les progrès conceptuels engendrés par la résolution — ou parfois, l'impossibilité de la résolution ! — des équations, dont le degré s'accroît naturellement au cours du temps. Commençons par ce qu'il y a de plus ancien, et de plus simple, dans nos sociétés comme dans chacun de nous.

2 Le degré 0

Avant les équations, il y a les nombres. Et plus précisément, ceux que nous avons rencontrés avant de savoir écrire, dans notre petite enfance : un, deux, trois, quatre,... lorsque nous avons commencé à compter sur nos doigts. Cette démarche archaïque n'est pas qu'un souvenir de cet âge très tendre, c'est aussi un thème de recherche.

D'abord, pour les biologistes ; les chercheurs sont à présent en mesure d'identifier les régions du cerveau qui sont activées lorsqu'une personne calcule. Ils se sont ainsi aperçus qu'elles sont proches des zones responsables de la préhension et du fonctionnement des mains. On peut formuler l'hypothèse que cette proximité n'est pas fortuite, et que nous commençons par *appréhender* les nombres par l'observation de nos doigts. Faudrait-il en déduire que pour former les jeunes enfants aux mathématiques, il suffit de les faire jouer au ballon, pour accentuer leur dextérité et leur vision dans l'espace ? Rêvons à cette idée, mais gardons-nous des conclusions hâtives !

Le comptage digital est également intéressant pour les ethnologues et les historiens : c'est bien sûr aux cinq doigts de la main que nous devons le fait que la majorité des sociétés humaines a utilisé les bases de numération 5, 10 ou 20. Les témoignages les plus anciens dont on dispose sont des os entaillés d'une succession d'encoches, remontant à l'Aurignacien. Ainsi, un os de loup retrouvé en Moravie comporte 55 encoches approximativement groupées par 5, cependant que la vingt-cinquième est agrandie et doublée ; il est naturel d'y voir un témoignage d'un compte rudimentaire en base 5 vieux de plus de deux cents siècles. La base 10 domine aujourd'hui sans partage. Pourtant, la base 20 qui était celle des Mayas, des Aztèques et de l'ensemble des peuples celtes, et très usitée dans le français du Moyen-Age, nous a légué quatre-vingts ; vénérable souvenir du fait que nos ancêtres les Gaulois comptaient sans doute sur les doigts... et les orteils. Bien sûr, soixante-dix et quatre-vingt-dix procèdent de la même démarche. Mais les Belges, auxquels j'ai le plaisir de m'adresser aujourd'hui, utilisent plutôt comme en latin septante et nonante. Puissent-ils ne pas renoncer à cet usage : leurs voisins d'Outre-Manche disent *seventy* et *ninety* et la domination de la langue anglaise s'affirme un peu plus chaque jour. L'avenir est à septante !

Revenons au comptage digital. Il est évident qu'on peut additionner et

soustraire sur ses doigts. Il est moins connu qu'ils peuvent nous aider à multiplier. Voici quelques-uns des « trucs » qu'on apprenait sans doute dans les Universités du Moyen-Age.

Numérotons les doigts de nos deux mains ouvertes en commençant par le doigt le plus à gauche. En repliant le doigt x , j'obtiens la valeur $9 \times x$: il y a autant de dizaines que de doigts à gauche du doigt replié, autant d'unités que de doigts à droite de ce même doigt. Faut-il multiplier deux nombres x et y entre cinq et dix ? J'étends autant de doigts de la main gauche qu'il y a d'unités entre 5 et x , autant de doigts de la main droite qu'il y en a entre 5 et y , je multiplie par 10 le nombre total de doigts étendus, et j'y ajoute le produit des nombres de doigts repliés à gauche et à droite : cela donne $x \times y$. Doit-on à présent multiplier deux nombres t et u entre dix et quinze ? On procède de même avec le nombre d'unités dont t et u excèdent 10, on multiplie par 10 le nombre total de doigts étendus, on ajoute le produit des nombres de doigts étendus à droite et à gauche et enfin 100 au nombre obtenu : nous y sommes.

Nous pouvons donc dans une certaine mesure multiplier sur nos doigts. Mais pour diviser, c'est une autre paire de manches : que seraient donc $3/5$ de doigts ? Pour aborder ce nouveau problème, nous avons besoin d'une technologie plus avancée : l'écriture.

3 Le degré 1

L'usage des chiffres romains s'est perpétué jusqu'à nos jours en Europe. Ce système de numération est pourtant très peu commode, puisqu'il ne fait pas appel au principe de position. Là où les romains écrivent

MMMMCCLXXXIII

nous notons 4283, et dans cette écriture c'est la *position* du chiffre 2, par exemple, qui nous fait savoir que notre nombre contient deux centaines. Les Babyloniens de l'époque perse puis séleucide, contemporains des Romains, utilisaient pourtant une numération de position pratiquement parfaite, héritée des Sumériens et des Akkadiens. Ce système reposait sur l'usage de la base *soixante*, où les « chiffres » de 1 à 59 étaient notés à l'aide de deux symboles : le « chevron »

◁

représentant 10, et le « clou »

∩

pour l'unité. Ainsi, 4283 s'écrit

∩ ◁∩ ◁◁∩∩∩

puisque $4283 = 3600 + (11 \times 60) + 23$.

Ce système permettait bien sûr d'effectuer des calculs très poussés, d'autant plus que les scribes disposaient de tables de multiplication et de tables d'inverses qu'il leur suffisait de consulter. En termes modernes, ils savaient effectivement résoudre l'équation

$$ax = b$$

où a et b sont des nombres rationnels. Notons cependant une grande absence : le *zéro*. En effet, si des tablettes tardives portent des signes de séparation indiquant l'absence de termes d'un certain ordre (donc des zéros en position intermédiaire), nous ne disposons pas à ce jour de documents comportant des zéros en position finale. En d'autres termes, seul le contexte permettait de décider si un clou seul

∩

désignait dans une liste ou dans un calcul 1, 60, 3600,... Il n'est pas évident, pour nous qui avons manipulé le zéro dès l'enfance, de comprendre pourquoi ces excellents calculateurs n'ont pas réussi à faire ce saut conceptuel. Peut-être pouvons-nous mesurer la difficulté en interrogeant l'homme de la rue sur l'intérêt présenté par l'ensemble vide !

Malgré l'absence du zéro, les Mésopotamiens ont effectué dès leur époque classique (du 18^e au 15^e siècle avant J. C., lors de la dynastie d'Hammourabi) de très impressionnants calculs. Nous les voyons ainsi calculer le rapport diagonale/côté du carré (donc le nombre $\sqrt{2}$) avec trois chiffres séxagésimaux « après la virgule ». Leur calcul transcrit en décimal nous donne

$$\sqrt{2} \simeq 1,41421296 \dots$$

qui est exact à moins de 10^{-6} près. Une autre tablette nous énonce

$$3456^2 + 3367^2 = 4825^2.$$

Rêvons un instant au fait que ces calculs ont été effectués voici plus de 3500 ans. Et remarquons qu'ils suggèrent fortement que les scribes d'Hammourabi connaissaient, du moins au niveau pratique, le « théorème de Pythagore ».

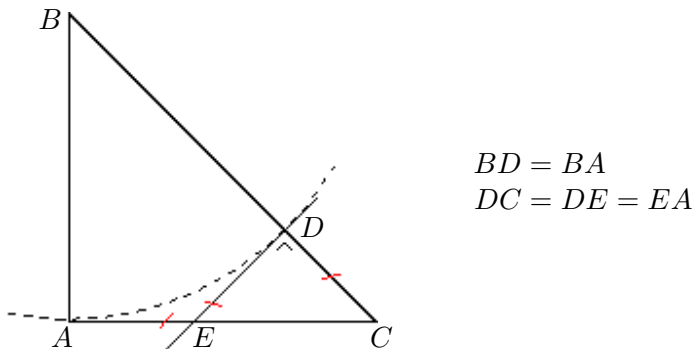
Nous sommes maintenant prêts à aborder le deuxième degré. Avant de quitter Babylone, saluons ses scribes et ses astronomes, et reconnaissons notre dette à leur égard : si nous mesurons le temps, et accessoirement les angles, en base soixante, c'est bien sûr à eux que nous le devons. En tant que « leaders » du domaine, leurs astronomes ont imposé leur mode de calcul à tous leurs collègues du monde antique, et celui-ci a perduré jusqu'à nos jours. Pensons-y lorsque nous jetons un coup d'oeil à nos montres.

4 Le degré 2

Nous venons d'entrevoir que le théorème de Pythagore était vraisemblablement connu bien avant celui-ci. Mais au fait, qui était Pythagore ? Nous n'avons aucune information vraiment fiable sur sa biographie, et son existence même n'est pas avérée. Ce qui est certain, c'est qu'une secte mystico-mathématique Pythagorienne était active à Crotona, en Grande Grèce, au sixième siècle avant J. C. Les Pythagoriciens accordaient, pense-t-on, une grande importance au concept d'*unité*. Des sources très postérieures leur attribuent la découverte, au cours de leurs recherches géométriques, des grandeurs irrationnelles, ajoutant même que cette découverte avait provoqué l'effondrement de toute leur doctrine. En réalité, nous ne disposons pas de textes contemporains, et les documents fiables (Platon, puis Aristote) ne décrivent pas une telle catastrophe mentale. Ce que nous savons, c'est qu'avant Platon (-427/-347 avant J. C.), on savait *démontrer* (à Athènes) que la diagonale d'un carré de côté 1 est le côté d'un carré de surface 2 (donc a pour longueur « racine de 2 »), puisque dans le dialogue du *Ménon*, Socrate utilise sa maïeutique pour convaincre un esclave du résultat en lui faisant retrouver la démonstration. Les irrationnels étaient quant à eux reconnus, et étudiés, par les contemporains de Platon qui fréquentaient son École, et en particulier par Eudoxe.

Quand ont-ils été découverts, par qui, et comment ? Nous ne savons pas. Le sujet était d'actualité pour les chercheurs de l'époque classique, on peut donc formuler l'hypothèse que la découverte date de la fin du 5ème siècle avant J. C. L'auteur (ou les auteurs) sont anonymes ; des sources tardives et invérifiables désignent Hippase de Métaponte. L'histoire de la mort par noyade du découvreur (ou du divulgueur) du résultat est très probablement une métaphore mal comprise sur l'eau et la mer comme figures de l'insaisissable, que l'on retrouve chez Héraclite. Enfin, quelle était la démonstration ? On conjecture que la pre-

mière approche était géométrique. Voici par exemple une approche simple, à laquelle les Grecs n'auraient rien trouvé à redire. Si $\sqrt{2}$ est rationnel, il existe un triangle rectangle isocèle à côtés entiers. Mais alors la construction ci-dessous



permet lorsqu'on l'itère de produire des triangles rectangles isocèles à côtés entiers arbitrairement petits, d'où une contradiction manifeste. Malheureusement, nous manquons de documents... En fait, on ne sait même pas si les premières démonstrations concernaient $\sqrt{2}$ ou $(1 + \sqrt{5})/2$. Aristote, qui évoque la question, parle de l'« irrationalité du rapport de la diagonale sur le côté » mais ne précise malheureusement jamais s'il s'agit du carré ou du pentagone ! Mais l'important n'est sans doute pas là. Du point de vue moderne, la découverte des irrationnels représente le premier résultat d'*impossibilité* jamais établi. Comme tel, il nous fait découvrir un des aspects fondamentaux des mathématiques : ce n'est pas qu'on s'y prend mal ou qu'on n'a pas encore la bonne technique ; simplement, on ne pourra jamais trouver une fraction dont le carré vaut 2.

Une telle constatation n'a rien de décourageant. Au contraire, c'est un défi lancé aux chercheurs qui doivent créer la théorie qui leur permettra de manipuler ces nouveaux objets. Dans le cas des irrationnels, les Grecs seront amenés à créer une admirable théorie des grandeurs

(attribuée à Eudoxe) et à développer une réflexion sur l'infini, motivée par le simple fait que le calcul effectif d'un nombre irrationnel nécessiterait une infinité d'étapes.

Il est raisonnable d'affirmer que les mathématiques grecques donnaient la primauté à la géométrie sur l'algèbre. En particulier, les Grecs ne savaient pas résoudre algébriquement les équations de degré 2, et n'ont considéré le troisième degré que dans des cas bien particuliers. Ce n'est donc pas eux qui nous ont appris l'algèbre. Nous devons pour cela prendre le chemin de Bagdad.

5 Le degré 3

Nous voici maintenant dans le Bagdad du 9^e siècle, celui des *Mille-et-une nuits* et des grands Califes abbassides : Al-Mansour, Haroun Al-Rachid, Al-Mamoun. Dans ce foyer de vie culturelle et scientifique, travaille Mohammed Ibn Musa Al-Khwarizmi, père historique de l'algèbre, qui énonce en particulier les solutions de $ax^2+bx+c=0$ sous la forme

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

et indique comment manipuler les équations. Le titre de son ouvrage le plus connu, *Kitab al-jabr wa'l muqabalah*, traduit au douzième siècle en *Liber algebrae et almucabola* (le traducteur Gérard de Crémone ne s'est pas fatigué inutilement...) nous donnera l'*algèbre*, cependant que le nom de l'auteur latinisé en *Algorismi* deviendra finalement *algorithme*... Quel plus bel hommage à rendre à un grand Ancien que de donner son nom à une technique fondamentale ?

Les mathématiciens arabophones vont, les premiers, considérer des équations polynomiales de degré quelconque, et s'attaquer au troisième degré. Omar Khayyam (1048-1123), mathématicien et poète (« Sois heureux, tu ne sais pas d'où tu es venu ; bois du vin, tu ne sais pas où tu iras »), s'y emploie sans succès. Son contemporain Al-Karkhi énonce des identités telles que

$$\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{54}$$

Fibonacci (1180–1250), qui fera connaître la science arabe à l'Italie, sait montrer que l'équation

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

ne peut être résolue par combinaison de racines carrées, et approximer une racine avec six chiffres (sexagésimaux !) après la virgule. Mais il faudra attendre trois siècles de plus pour la percée fondamentale.

Scipione dal Ferro, professeur à Bologne, montre vers 1500 que l'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

a pour racine

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Conformément à la coutume de son époque (qui consiste à garder ses découvertes secrètes pour lancer des défis aux collègues), dal Ferro ne publie pas cette découverte mais confie sa méthode à son gendre Annibale della Nave et à son étudiant Antonio Maria Fior. Pendant quelques décades, les choses en restent là. Mais vers 1535, Niccolo

Fontana dit Tartaglia (« le bègue ») retrouve la solution et triomphe dans le duel mathématique qui l'oppose à Fior (car il sait aussi résoudre les équations où figure un terme en x^2 !). Ce triomphe attire l'attention du grand Gerolamo Cardano, notre Cardan. Signalons au passage que ce Cardan est l'inventeur des « joints de Cardan », qui permettent à l'époque de préserver les boussoles des effets du tangage ; pensons à lui quand nous parlons du « cardan » à notre garagiste !

Revenons au troisième degré : Cardan rencontre Tartaglia et se fait confier la méthode, en jurant solennellement de ne jamais la révéler. Pendant quelques années, il tient parole... Mais voici qu'Annibale della Nave lui fait connaître la méthode de son défunt beau-père dal Ferro ! Dès lors, Cardan se considère délié de son serment, ce qui lui permet de publier en 1545 l'*Ars Magna*, où il expose les solutions des équations du troisième et du quatrième degré, en utilisant pour ces dernières la méthode toute neuve de son disciple Ludovico Ferrari. Notons à sa décharge qu'il fit pleinement référence à dal Ferro et Tartaglia pour la solution du troisième degré. Cependant, l'amertume de ce dernier est très vive, et les *Cartelli di matematica disfida* font connaître dans toute l'Italie l'ardente polémique...

Revenons aux mathématiques. En l'absence de documents, nous ne savons pas comment dal Ferro a procédé. Il est clair que des formules de cette complexité ne se devinent pas. Il faut donc qu'il y ait un cheminement logique, que nous allons essayer de reconstituer. Nous partons de l'identité

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{2a + 2\sqrt{a^2 - b}}$$

exprimée (bien entendu en langage géométrique) dans le livre X des *Éléments* d'Euclide. Au vu des identités d'Al-Karkhi rappelées plus haut, il est naturel de chercher une identité analogue pour

$$x = \sqrt[3]{a + \sqrt{b}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{b}}.$$

Pour cela, la première chose à faire est d'essayer d'éliminer les racines cubiques en calculant x^3 . Lorsqu'on fait cela, une mise en facteur nous donne

$$x^3 = -px - q$$

où p et q s'expriment simplement en fonction de a et b :

$$p = -3\sqrt[3]{a^2 - b^2}; \quad q = -2a.$$

Il suffit alors de calculer a et b en fonction de p et q pour obtenir la formule de dal Ferro.

Nous avons vu que bien avant dal Ferro, les mathématiciens disposaient de procédés d'approximation des racines très suffisants pour tous les calculs effectifs. Alors, à quoi peut bien servir la formule de dal Ferro ? Suivons Bombelli qui, en 1579, résoud l'équation

$$x^3 = 15x + 4$$

en donnant la solution

$$4 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

avec quelques précautions oratoires, puisque $\sqrt{-121}$, n'est-ce pas... Ce qui se passe, c'est qu'il y a une différence cruciale entre le deuxième et le troisième degré. Une équation quadratique n'a pas de solutions réelles quand la formule qui donne les racines n'a plus de sens. Par contre, c'est précisément quand une équation cubique a trois racines réelles que la formule de dal Ferro contient des racines carrées de nombres négatifs ! Ce *casus irreducibilis* a plongé dans l'embaras les algébristes du seizième siècle, et de fait il faudra environ deux siècles de plus pour que le choc soit digéré. Mais finalement, de même que le deuxième degré avait amené les Grecs à créer une théorie des

nombre réels, le troisième degré (épaulé par le calcul différentiel et intégral) conduira à l'introduction des nombres complexes.

Pourquoi fut-il si difficile d'accepter ces nombres « imaginaires » ? Sans doute parce qu'ils ne se prêtent pas à la comparaison : $\sqrt{-1}$ n'est ni plus grand, ni plus petit, ni égal à zéro... Lorsqu'on pratique le calcul par approximation et par encadrement, c'est bien gênant. Une suggestion pour les enseignants : pourquoi toujours noter dans les rationnels décimaux entre 0 et 20 ? Pourquoi ne pas noter une copie faible, pleine de développements élégants mais sans rapport avec le sujet, $(\sqrt{5} + 2i)/20$, par exemple ? Cela pourrait convaincre les élèves que deux notes ne se comparent pas nécessairement... mais peut-être le Préfet ne serait-il pas d'accord.

6 Le cinquième degré

Nous avons vu que la résolution de l'équation de degré 3 avait été presque immédiatement suivie de celle de degré quatre. Ces progrès sensationnels étaient de nature à mettre en confiance les algébristes, qui s'attaquèrent bien sûr au cinquième degré... sans succès. Euler, cependant, explique comment choisir les racines cubiques complexes qui figurent dans la formule de dal Ferro pour obtenir *trois* racines et non neuf. S'appuyant sur son calcul, Lagrange analyse le succès de dal Ferro et comprend la « métaphysique » de la preuve. Suivons-le et notons x_1, x_2 et x_3 les racines (complexes) de $x^3 + px + q = 0$. Soit

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

et considérons

$$L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + jx_2 + j^2x_3)^3.$$

Lorsqu'on permute x_1 , x_2 et x_3 dans l'expression de L , on n'obtient (puisque $j^3 = 1$) que deux valeurs, qu'on peut noter

$$L(x_1, x_2, x_3) = I, \quad L(x_2, x_1, x_3) = J.$$

Par conséquent, $I + J = S$ et $I \times J = P$ sont invariantes par permutation des racines, donc, d'après un théorème de Newton, elles peuvent s'exprimer à l'aide de p et q . Le calcul montre en effet que

$$S = -27q; \quad P = -27p^3$$

On peut alors calculer I et J comme racines de l'équation de degré deux

$$X^2 - SX + P = 0$$

et en déduire par extraction de racines cubiques

$$\begin{aligned} x_1 + jx_2 + j^2x_3 &= \sqrt[3]{I} \\ jx_1 + x_2 + j^2x_3 &= \sqrt[3]{J} \end{aligned}$$

Comme on a d'autre part $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ puisque l'équation n'a pas de terme en x^2 , on a un système linéaire de trois équations à trois inconnues, dont la résolution donne x_1 , x_2 et x_3 .

Si on regarde bien cette preuve, on voit que ce qui fait tout marcher, c'est que l'expression $L(x_1, x_2, x_3)$ ne prend que deux valeurs quand on permute (x_1, x_2, x_3) ; en fait, elle est invariante par le *sous-groupe* engendré par le cycle $x_1 \rightarrow x_2; x_2 \rightarrow x_3; x_3 \rightarrow x_1; \dots$ Mais c'est Galois qui le premier, en tirera toutes les conséquences.

L'histoire du cinquième degré est celle de deux adolescents géniaux, Niels Abel (1802–1829) et Evariste Galois (1811–1832), aux destins tragiques. Niels Abel naît en Norvège d'un père pasteur et d'une mère

pianiste, malheureusement alcooliques. A treize ans, il est envoyé à la *Kathedralskole* de Christiania (Oslo), où le professeur de mathématiques est si violent qu'il finit par battre à mort l'un de ses élèves. Il est (tout de même !) renvoyé, et son successeur Holmboe, d'une toute autre stature, prend conscience du talent d'Abel et ose écrire sur son bulletin « deviendra, s'il vit, le plus grand mathématicien du monde ». Une maigre bourse lui permet de voyager en Italie, en Allemagne et à Paris. Malgré ses publications dans le *Journal de Crellé* fondé par son ami, il ne parvient pas à obtenir un poste d'enseignant. Affaibli par la maladie et sans le sou, il rentre en Norvège et meurt de la tuberculose à vingt-sept ans, deux jours avant qu'arrive la lettre lui proposant sa nomination à l'Université de Berlin.

Evariste Galois est le fils du maire républicain (en pleine Restauration...) de Bourg-la-Reine, au sud de Paris. Elevé jusqu'à douze ans par sa mère, il entre au Collège Royal Louis-le-Grand (aujourd'hui lycée du même nom). Le suicide de son père, sans doute consécutif à une cabale politique, le jette dans la révolte. Expulsé de Louis-le-Grand, il essaye vainement d'intégrer l'Ecole Polytechnique, alors bastion des idées républicaines, et doit se contenter de l'Ecole Normale Supérieure. Ses mémoires mathématiques sont égarés ou classés sans suite par leurs rapporteurs, et le directeur de l'Ecole Normale interdit à ses élèves de participer aux journées d'émeute de Juillet 1830. Galois proteste, est renvoyé, puis emprisonné pour avoir, lors d'un banquet républicain, porté un toast « à Louis-Philippe »... en brandissant un couteau. Il échappe à une tentative d'assassinat durant son séjour à la prison de Sainte-Pélagie, mais meurt en juin 1832 des suites d'un duel dont les motifs restent mal élucidés. Il faudra attendre 1846 pour que, grâce à l'insistance infatigable de son frère Alfred, son travail soit enfin reconnu et publié par Liouville dans son *Journal de mathématiques pures et appliquées*.

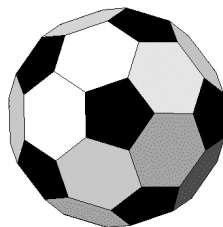
Abel et Galois ne se sont sans doute jamais rencontrés, même si nous

savons qu'Abel visitait le Quartier Latin quand Galois y faisait ses études. Ils ont montré indépendamment l'absence de formules pour le degré cinq, par des méthodes proches mais distinctes. Parlons de celle de Galois, qui consiste à analyser l'approche de Lagrange pour comprendre que son succès repose sur la structure du *groupe* des permutations d'un ensemble à trois éléments. Dans la terminologie d'aujourd'hui, nous disons que ce groupe est *résoluble*, c'est-à-dire qu'il peut être « dévissé » en groupes cycliques. C'est encore vrai du groupe des permutations d'un ensemble à quatre éléments, mais ça devient faux à partir de cinq ! Galois montre cela, et comment en déduire que l'équation générale de degré cinq n'est pas résoluble par radicaux. Mais en fait, sa découverte va bien plus loin que cela ; en effet, de même que les travaux d'Al-Khwarizmi et des algébristes montraient comment regrouper de nombreux problèmes géométriques sous une seule équation, la théorie de Galois montre comment analyser de nombreuses équations avec un seul groupe. C'est donc le groupe qui devient sujet d'étude. Galois est bien conscient de la profondeur de sa démarche lorsqu'il écrit : « Sauter à pieds joints sur ces calculs ; grouper les opérations, les classer suivant leurs difficultés et non suivant leurs formes ; telle est, suivant moi, la mission des géomètres futurs ». Le point de vue de Galois n'a pas été dépassé à ce jour, bien qu'à la suite des travaux d'Alexandre Grothendieck, l'accent soit plutôt mis à présent sur les *morphismes* entre groupes que sur les groupes eux-mêmes — selon ce mouvement naturel des mathématiques qui fait s'effacer les objets derrière les relations qu'ils entretiennent entre eux.

Comment peut-on se faire une intuition de la complexité croissante des groupes de permutation ? Voici deux propositions. Pour les sportifs, essayons de jongler : n'importe quel maladroit apprend à jongler avec trois balles en un après-midi (j'en témoigne personnellement), jongler avec quatre balles demande des semaines d'efforts, parvenir à cinq balles des mois d'entraînement. Seuls les professionnels vont

au-delà. Il est clair que jongler avec n balles revient à faire agir sur ces balles un sous-groupe (à deux générateurs) du groupe \mathcal{S}_n ; monsieur Galois nous a appris à analyser cette situation.

Une autre approche, plus classique, fait le lien avec les polyèdres réguliers bien connus des géomètres de l'Ecole de Platon, et en particulier des plus complexes (et plus beaux) d'entre eux : l'icosaèdre et le dodécaèdre. Le groupe des isométries directes de ces polyèdres est en effet isomorphe au groupe \mathcal{A}_5 à 60 éléments, le plus petit groupe simple non commutatif, dont le caractère « incassable » est responsable de l'im-



possibilité de résoudre l'équation du cinquième degré, comme Galois l'a montré. Nous pourrions voir cette interprétation géométrique comme une curiosité amusante mais sans grande portée. Esquignons pourtant une connection inattendue avec la chimie contemporaine. Voici une dizaine d'années, les chimistes ont découvert les molécules de « Fullerène » C_{60} , constituées de 60 atomes de carbone situés sur une sphère, dans une disposition identique à l'intersection des coupures d'un ballon de football. Le ballon de football (qu'on peut appeler pompeusement l'icosaèdre tronqué) est le juste milieu entre l'icosaèdre et le dodécaèdre : si on agrandit mentalement les parties noires jusqu'à couvrir la sphère, on obtient le dodécaèdre, si on en fait autant avec les pièces blanches, cela donne l'icosaèdre. Et il se trouve que l'étude du groupe des symétries de la molécule de Fullérene, qui conduit au calcul de ses niveaux d'énergie, relie celui-ci à des résultats arithmétiques profonds explicités par Galois en 1832, dans sa dernière lettre écrite dans la nuit précédente au duel qui l'a emporté. Savait-il que ses résultats hâtivement griffonnés fascinaient des générations de chercheurs ?

Je voudrais conclure cet exposé en remarquant que les découvertes

que nous avons évoquées (l'invention des irrationnels, la résolution du troisième degré et la non-résolution du cinquième) n'ont pas immédiatement changé la nature des calculs effectués par les contemporains. Mais elles ont enrichi les mathématiques de nouveaux concepts : nombres complexes, groupes,... Ces concepts ont alors vécu de leur propre vie, en produisant des applications inattendues et sans rapport avec le problème qui les avait vu naître. Il s'agit là d'un phénomène fréquent en mathématiques, qui réhabilite jusqu'aux théorèmes d'impossibilité qu'on pourrait croire inutiles par nature. Ne soyons donc pas intimidés outre mesure par la redoutable question : A quoi ça sert ? Mais à quoi sert un enfant nouveau-né ?

7 Bibliographie

N. BOURBAKI, « Eléments d'histoire des mathématiques », Paris, Hermann, 1974.

R. BOURGNE, « L'incorruptible Galois », La Recherche, Novembre 1982.

A. DAHAN-DALMEDICO, J. PEIFFER : « Une histoire des mathématiques ; routes et dédales », Seuil, 1986.

S. DEHAENE, « La bosse des maths », Editions Odile Jacob, 1997.

D. H. FOWLER, « The mathematics of Plato's Academy, a new reconstruction », Oxford, Oxford Science Publication-Clarendon Press, 1987.

G. GODEFROY, « L'aventure des nombres », Editions Odile Jacob, 1997.

C. GOLDSTEIN, « La naissance du nombre », La Recherche, numéro spécial « Nombres », Août 1995.

B. HAUCHECORNE, D. SURREAU, « Des mathématiciens de A à Z », Ellipses, 1996.

B. KOSTANT, « The graph of the truncated icosahedron and the last letter of Galois », Notices of the A.M.S., Sept. 1995.

« Le matin des mathématiciens », entretiens sur l'histoire des mathématiques présentés par Emile Noël, Editions Belin-Radio France, 1985.

Préprints récents

- [1] *Maurice Boffa's 60th Birthday Workshop*, March 23, 2000.
- [2] Catherine FINET, *Perturbed minimization principles in partially ordered Banach spaces*, June 29, 2000.
- [3] Arnaud MAES, Corinne CERF, *A family of brunnian links based on Edwards' construction of Venn diagrams*, July 15, 2000.
- [4] Catherine FINET Lucas QUARTA Christophe TROESTLER, *A new notion of lower semi-continuity and applications to vector optimization*, January 19, 2000.

Les prépublications de l'*Institut de Mathématique et d'Informatique* sont consultables et téléchargeables sur le site web : <http://www.umh.ac.be/math/preprints/>. Si vous voulez recevoir des copies papier, veuillez écrire à l'adresse suivante :

Institut de Mathématique et d'Informatique
Université de Mons-Hainaut
« Le Pentagone », 6 av. du champ de Mars
7000 Mons, Belgique