

Examen d'algèbre - Partie polynômes JUIN 2005

Justifier toutes vos réponses. La qualité de la rédaction de vos arguments sera notée.

1. (a) Décomposer le polynôme $X^4 + 1$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.
- (b) Décomposer le polynôme $3X^4 + 5X^2 + 10X + 15$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$ et $\mathbb{F}_5[X]$.

2. (a) Soit I l'idéal de $\mathbb{R}[X]$ engendré par $X^4 + 1$, c'est à dire

$$I = \langle X^4 + 1 \rangle = \{f \cdot (X^4 + 1) \mid f \in \mathbb{R}[X]\}.$$

L'anneau $\mathbb{R}[X]/I$ a-t-il des diviseurs de 0? Si oui donner un exemple, si non justifier.

- (b) Soit J l'idéal de $\mathbb{R}[X]$ engendré par $X^2 + 1$, c'est à dire

$$J = \langle X^2 + 1 \rangle = \{f \cdot (X^2 + 1) \mid f \in \mathbb{R}[X]\}.$$

Calculer l'inverse de l'élément $X + J$ dans $\mathbb{R}[X]/J$.

(Aide facultative: Calculer l'inverse de i dans \mathbb{C} .)