Examen d'algèbre
JUIN 2004

Justifier toutes vos réponses. La qualité de la rédaction de vos arguments sera notée.

I.

Soit $E_n = \{1, 2, ..., n\}$ ($n \geq 3$), soit $i \in E_n$, soit $\sigma \in S_n$, l'image de i par $\sigma(i)$ est naturellement définie et est un élément de E_n.

1. Prouver que $\mathcal{O}_{S_n}(i)$ qui est, par définition, $\{\sigma(i) \mid \sigma \in S_n\}$ est égal à E_n.
2. Soit $St(i) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i\}$ (Pour éviter la lourdeur de la notation, nous n'avons pas mentionné par un indice n la dépendance de $St(i)$ par rapport à n).
   (a) Prouver que $St(i)$ est un sous-groupe de S_n, quel que soit $i \in E_n$.
   (b) $St(i)$ est-il un sous-groupe normal de S_n?
3. Soit $\langle G, \cdot, 1\rangle$ un groupe, soit H un sous-groupe de G, soit $g \in G$.
   (a) Montrer que H^g qui est, par définition, $\{ghg^{-1} \mid h \in H\}$ est un sous-groupe de G, et qu'il est isomorphe à H.
   (b) Prouver que si $g_1, g_2 \in G$ alors $H^{(g_2 g_1)} = (H^{g_1})^{g_2}$.
   (c) Prouver que H est un sous-groupe normal de G si et seulement si pour tout $g \in G$, $H^g = H$.
   (d) Prouver que $N_H = \{g \in G \mid H^g = H\}$ est un sous-groupe de G tel que H est un sous-groupe normal de N_H.
   (e) Soit $i, j \in E_n$, prouver qu'il existe $\sigma \in S_n$ tel que $St(j) = (St(i))^\sigma$.
   (f) Prouver que quel que soit $i \in E_n$, $St(i)$ est isomorphe à S_{n-1}.

Examen d'algèbre
JUIN 2004

Justifier toutes vos réponses. La qualité de la rédaction de vos arguments sera notée.

II.

1. (a) Décomposer le polynôme $X^3 + 5$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.
   (b) Le polynôme $X^5 + 10X^3 - 15X^2 + 20X - 5$ a-t-il une racine dans $\mathbb{Z}[X]$? $\mathbb{R}[X]$?
2. (a) On considère $I = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid f(1) = f(-1) = 0\}$, on sait que I est un idéal de $\mathbb{R}[X]$ (vous ne devez pas le montrer), cet idéal est-il un idéal premier? maximal? Justifier.
   (b) L'anneau $\mathbb{R}[X]/I$ a-t-il des diviseurs de 0? Justifier.
3. On considère le corps à trois éléments $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ obtenu en faisant le quotient de l'anneau $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1\rangle$ par l'idéal maximal $3\mathbb{Z}$. Pour rappel, les lois $+$ et $\cdot$ sur $\mathbb{F}_3$ sont définies comme suit:

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

   (a) On sait que $\mathbb{F}_3[X]$ est un anneau commutatif (vous ne devez pas le prouver), est-ce un corps? Justifier.
   (b) Le polynôme $X + 1$ est-il réductible dans $\mathbb{F}_3[X]$?
   (c) Donner la décomposition en facteurs irréductibles de $X^2 + X + 1$ et $X^2 + X + 2$ dans $\mathbb{F}_3[X]$.
   (d) Soit $J = \{f.(X^2+X+2) \mid f \in \mathbb{F}_3[X]\}$, on sait que J est un idéal de $\mathbb{F}_3[X]$(vous ne devez pas le prouver). L'anneau $\mathbb{F}_3[X]/J$ est-il un corps? Justifier.
   (e) Calculer $|\mathbb{F}_3[X]/J|$.