

Logique mathématique MARS 1994

Justifier toutes vos réponses. La qualité de la rédaction de vos arguments sera notée.

1. Ecrire la forme générale d'un terme du langage de la structure $\langle \mathbb{R}, \sin, \leq \rangle$.
2. Trouver toutes les sous-structures finies de $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$
3. Ecrire les conditions que doit vérifier une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pour qu'elle soit un morphisme de $\langle \mathbb{R}, +, \sin, 0 \rangle$ dans $\langle \mathbb{R}, +, \sin, 0 \rangle$. Trouver 3 exemples d'un tel morphisme.
4. Ecrire la condition qu'un nombre réel $a \geq 0$ doit vérifier pour que $\langle [0, a], \sin \rangle$ soit une sous-structure de $\langle \mathbb{R}, \sin \rangle$. Donner tous les nombres réels $a \geq 0$ vérifiant cette condition.
5. Ecrire un énoncé vrai dans $\langle \mathbb{R}, \sin \rangle$ mais faux dans toutes ses sous-structures de la forme $\langle [0, a], \sin \rangle$.
6. Soit X un sous-ensemble de \mathbb{N} .
 - (a) i. Ecrire la condition que doit vérifier X pour qu'il existe un ultrafiltre \mathcal{U} sur \mathbb{N} tel que $X \notin \mathcal{U}$.
 - ii. Prouver qu'il existe un ultrafiltre \mathcal{U} sur \mathbb{N} vérifiant $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est pair} \} \notin \mathcal{U}$.
 - (b) Ecrire la condition que doit vérifier X pour que l'ensemble $E = \{X\} \cup \{Y \subseteq \mathbb{N} \mid Y \text{ est cofini} \}$ ait la propriété d'intersection finie (p.i.f.).
Prouver qu'il existe un ultrafiltre non principal vérifiant $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est pair} \} \in \mathcal{U}$.
7. Soit pour tout $n \geq 1$ la structure $\mathcal{A}_n = \langle \{0, 1, \dots, n-1, n\}, f, \leq \rangle$, où \leq est l'ordre induit par l'ordre usuel sur \mathbb{N} et où f est la transposition $(n-1, n)$. Soit $\mathcal{A} = \prod^{\mathcal{U}} \mathcal{A}_n$ où \mathcal{U} est un ultrafiltre non principal sur $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.
 - (a) Prouver que \mathcal{A} a un plus grand élément (pour \leq). Trouver cet élément.
 - (b) Prouver que l'ordre \leq sur \mathcal{A} est total.
 - (c) Prouver que \mathcal{A} vérifie la formule suivante:

$$(\exists x) \left((\forall y) (y > x \Rightarrow (\forall z) (y \geq z)) \right)$$

où $y > x$ est une abréviation pour $y \geq x \wedge y \neq x$

(d) Prouver que \mathcal{A} a un élément x tel qu'il existe un seul élément y de \mathcal{A} vérifiant $x < y$.

(e) Décrire la fonction $f^{\mathcal{A}}$.

8. Soit la fonction $x \rightarrow 2^x$.

Que vaut 2^x quand x est infiniment petit? Même question quand x est infiniment grand positif, infiniment grand négatif.