

AVRIL 2005

Justifier toutes vos réponses. La qualité de la rédaction de vos arguments sera notée.

1. Soit S_3 le groupe des permutations de $E_3 = \{1, 2, 3\}$.
 - (a) Donner un exemple de sous-groupe de S_3 à i éléments pour $i = 1, 2, 3$ et 4.
 - (b) On note H_1 (respectivement H_2 et H_3) le groupe à 1 (respectivement 2 et 3) élément(s) que vous avez construit au point précédent. Décrire explicitement S_3/H_1 , S_3/H_2 et S_3/H_3 .
 - (c) Parmi les ensembles S_3/H_1 , S_3/H_2 et S_3/H_3 lesquels sont des groupes? Pour chacun des S_3/H_i qui est un groupe, trouver un groupe connu qui lui est isomorphe.
2. Soit S_n le groupe des permutations de $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Pour chaque $p \in S_n$, on définit la fonction \bar{p} comme suit:

$$\bar{p}(i) = \begin{cases} p(n) & \text{si } i = 1 \\ p(i) & \text{si } i \in \{2, \dots, n-1\} \\ p(1) & \text{si } i = n \end{cases}$$

- (a) Calculer \bar{p} dans S_2 quand $p = \mathbb{1}$ et $p = (12)$.
 - (b) Calculer \bar{p} dans S_5 quand $p = \mathbb{1}$, $p = (12)$ et $p = (1234)$.
 - (c) Calculer \bar{p} dans S_n quand $p = \mathbb{1}$ et $p = (1n)$.
 - (d) Prouver que $\bar{p} \in S_n$ quel que soit $p \in S_n$.
 - (e) L'application $\sigma : S_n \rightarrow S_n$ définie par $\sigma(p) = \bar{p}$ est-elle un morphisme? Justifier.
 - (f) L'application $\varphi : S_n \rightarrow S_n$ définie par $\varphi(p) = (p(1) p(n)) \cdot \bar{p}$ est-elle un morphisme? Justifier.
 - (g) (*) De façon générale, en fonction de la décomposition en cycles de p , décrire les cycles de \bar{p} .
 - (h) (*) Prouver que l'application $\theta : S_n \rightarrow S_n$ définie par $\theta(p) = (1n)\bar{p}$ est un automorphisme interne de S_n .
3. Soit $\langle G, \cdot, 1 \rangle$ un groupe, $a \in G$, on note $a^G = \{gag^{-1} \mid g \in G\}$, la classe de conjugaison de a dans G .
 - (a) Soit $\langle H, \cdot, 1 \rangle$ un groupe et σ un épimorphisme de G dans H calculer $\sigma(a^G)$.
 - (b) Un isomorphisme σ de G dans G est appelé un automorphisme de G . On considère l'ensemble de tous les automorphismes de G , noté $Aut(G)$ muni de la composition de fonctions. Montrer que $Aut(G)$ est un groupe. On suppose que la composition de fonctions est une opération associative (vous ne devez pas le démontrer).
 - (c) On sait que l'ensemble des automorphismes internes de G , noté $Int(G)$ est un sous-groupe de $Aut(G)$ (vous ne devez pas le montrer). Prouver que $Int(G)$ est un sous-groupe normal de $Aut(G)$.

(d) (*) Si G est fini, prouver que le nombre d'éléments de a^G divise l'ordre du groupe. Voici quelques indications sur la façon de procéder:

- i. Prouver que $Stab_a = \{g \in G \mid gag^{-1} = a\}$ est un sous-groupe de G .
- ii. Prouver que pour tout élément $g, g' \in G$, $gag^{-1} = g'ag'^{-1}$ si et seulement si $g' \in gStab_a$.
- iii. Prouver que le nombre de conjugués de a est égal à l'indice de $Stab_a$ dans G .