

## Examen d'algèbre - Partie groupes Septembre 2005

Justifier toutes vos réponses. La qualité de la rédaction de vos arguments sera notée.

1. Soit  $\langle A, \cdot_A, 1_A \rangle$  et  $\langle B, \cdot_B, 1_B \rangle$  deux groupes. On sait que  $A \times B$  muni des opérations composante par composante induite par celles de  $A$  et  $B$  est un groupe (appelé le produit direct de  $A$  et de  $B$ ). Prouver que si  $H \triangleleft A$  et  $G \triangleleft B$  alors  $H \times G \triangleleft A \times B$ .
2. Soit  $\sigma : A \times B \rightarrow C$  un épimorphisme de groupes. Prouver que si  $\ker(\sigma)$  est de la forme  $H \times G$  avec  $H < A$  et  $G < B$  alors  $C$  est isomorphe à un produit direct de deux groupes. Que déduisez-vous dans le cas particulier où  $\ker(\sigma) = \{(1_A, 1_B)\}$ ?
3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$  deux nombres premiers distincts vérifiant  $n = p_1 p_2$ . Soit l'application  $\tau$  définie comme suit:

$$\tau(a, b) = (ap_2 + bp_1) \pmod n$$

avec  $a \in \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z}$  et  $b \in \mathbb{Z}/p_2\mathbb{Z}$ .

- (a) Prouver que  $\tau$  est un morphisme de  $\langle \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p_2\mathbb{Z}, + \rangle$  dans  $\langle \mathbb{Z}_n, + \rangle$ .
  - (b) Prouver que  $\ker(\tau)$  est réduit à un singleton.
  - (c) Montrer que  $\langle \mathbb{Z}_n, + \rangle$  est isomorphe au produit direct  $\langle \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p_2\mathbb{Z}, + \rangle$ .
4. Pour  $n \in \mathbb{N}$  ( $n \geq 1$ ) on définit l'ensemble  $G_n$  comme suit

$$G_n = \left\{ p \in S_n \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} (i \equiv 2 \pmod 5) \Rightarrow (p(i) = i) \right\}$$

- (a) Prouver que  $G_n < S_n$ .
- (b) Décrire explicitement  $G_2, G_3$  et  $G_4$ . A quel groupe connu  $G_4$  est-il isomorphe?
- (c)  $G_2$  est-il un sous-groupe normal de  $S_2$ ?
- (d) Pour  $n \geq 3$ ,  $G_n$  est-il un sous-groupe normal de  $S_n$ ?
- (e) Donner l'ordre de  $G_{20}$ .