Examen d'algèbre
AOUT 2003

Justifier toutes vos réponses. La qualité de la rédaction de vos arguments sera notée.

I.

1. Soit G un groupe, soit $h \in G$. L'ensemble des conjugués de h par les éléments de G est $\{ghg^{-1} \mid g \in G\}$, cet ensemble est appelé classe de conjugaison de h dans G et est noté h^G.
   (a) Prouver que les ensembles h^G avec $h \in G$ forment une partition de G.
   (b) Soit H un sous-groupe de G, prouver que H est un sous-groupe normal de G si et seulement si pour tout $h \in H$, $h^G \subseteq H$.
2. Calculer la classe de conjugaison de $\mathbb{1}$ dans S_{272}.
3. Calculer la classe de conjugaison de (12) respectivement dans S_2, S_3 et S_4.
4. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier.
   (a) L'ensemble $L = \{\mathbb{1}, (12)\}$ est un sous-groupe de S_n pour tout $n \geq 2$.
   (b) L est un sous-groupe normal de S_3.
   (c) L n'est pas un sous-groupe normal de S_4.
   (d) L est un sous-groupe normal de S_5.
   (e) Soit $h \in S_n$, les conjugués de h ont même parité que h.
   (f) Tous les sous-groupes de S_{273} sont normaux.

Examen d'algèbre
AOUT 2003

Justifier toutes vos réponses. La qualité de la rédaction de vos arguments sera notée.

II.

1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier.
   (a) Le polynôme $X^3 + 2X^2 + 4X + 6$ est récuctible dans $\mathbb{Z}[X]$.
   (b) Le polynôme $X^5 - 4X^3 + 7X^2 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
   (c) Tout polynôme réductible de $\mathbb{R}[X]$ a une racine dans $\mathbb{R}$.
2. Donner la décomposition en facteurs irréductibles du polynôme $X^5 - 13$ dans $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{Q}[X]$.
3. Soit $\sigma : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ tel que $\sigma(p) = p(2)$ pour tout $p \in \mathbb{R}[X]$. On sait que σ est un morphisme d'anneau (vous ne devez pas le montrer). Calculer $Ker(\sigma)$ et $Im(\sigma)$.
4. Décomposer le polynôme $X^3 + 2X + 2$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{F}_5[X]$. (Rappel: $\langle \mathbb{F}_5, +, \cdot, 0, 1\rangle$ est le corps à cinq éléments: $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ muni de l'addition et de la multiplication *modulo* 5.)
5. Soit I l'idéal de $\mathbb{Q}[X]$ engendré par le polynôme $X^2 + X - 1$, c'est à dire:
$$I = \{p.(X^2 + X - 1) \mid p \in \mathbb{Q}[X]\}.$$
   L'anneau $\mathbb{Q}[X]/I$ est-il intègre? est-il un corps? Justifier.
   Calculer s'il existe, l'inverse de $X + I$ dans l'anneau $Q[X]/I$.