Correction de l'examen sur les groupes de janvier 1979 (A.7)

I.

1. On prouve que G est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$:
   (a) $G \subseteq GL_2(\mathbb{R})$ puisque quel que soit $g \in G$, $det(g) = b > 0$.
   (b) Le neutre $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$, en effet, il suffit de prendre $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \in G$ avec $a = 0$ et $b = 1$.
   (c) La loi . est interne et partout définie dans G, pour tout $g_1 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G$:

$$g_1.g_2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c+ad \\ 0 & bd \end{pmatrix}$$

   Donc $g_1.g_2 \in G$ puisque $c + ad \in \mathbb{R}$ et $bd > 0$ car $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $b > 0$ et $d > 0$ vu que $g_1, g_2 \in G$.
   (d) Quel que soit $g = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \in G$, on calcule g^{-1} :

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{b} \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$$

   Donc $g^{-1} \in G$ puisque $-\frac{a}{b} \in \mathbb{R}$ et $\frac{1}{b} > 0$ car $a, b \in \mathbb{R}$ et $b > 0$ vu que $g \in G$.

   Pour prouver que G n'est pas commutatif, il faut trouver deux éléments g_1 et $g_2 \in G$ tels que $g_1.g_2 \neq g_2.g_1$. Par exemple avec $g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, en effet :

$$g_1.g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$g_2.g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Par définition du centre $Z(G)$, on a :

$$\begin{aligned} Z(G) &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \in G \ : \ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \quad \text{pour tout } \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \in G \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \in G \ : \ \begin{pmatrix} 1 & a+xb \\ 0 & yb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+ay \\ 0 & by \end{pmatrix} \quad \text{pour tout } a,\ b \in \mathbb{R} \text{ avec } b > 0 \in G \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \in G \ : a + xb = x + ay \quad \text{pour tout } a,\ b \in \mathbb{R} \text{ avec } b > 0 \in G \right\} \end{aligned}$$

   En particulier en fixant les valeurs $a = 0$ et $b = 2$, la condition d'appartenance au centre doit être vérifiée. Dans ce cas, on obtient la condition nécessaire: $x = 2x$, donc $x = 0$. La condition d'appartenance au centre devient donc : $x = 0$ et $ay = a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, donc $y = 1$, le centre se réduit donc au neutre (car tout sous-groupe de G contient l'identité), $Z(G) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

3. Soit σ l'application de G dans G tel que $\sigma\left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & a+b-1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, pour prouver que σ est un *automorphisme interne de G*, il faut prouver que il existe $h \in G$ tel que pour tout $g \in G$, $\sigma(g) = h.g.h^{-1}$ ou encore $\sigma(g).h = h.g$. Notons $g = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $h = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\sigma(g).h = h.g$$
$$\begin{pmatrix} 1 & a+b-1 \\ 0 & b \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & x+ay+by-y \\ 0 & by \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+bx \\ 0 & yb \end{pmatrix}$$

On cherche donc $x, y \in \mathbb{R}$ avec $y > 0$ tels que :

$$x + ay + by - x = a + bx \tag{1}$$

quel que soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b > 0$. Cette équation doit être vérifiée en particulier lorsque $a = 0$ et $b = 2$, on obtient alors $x + y = 2x$, ou encore $x = y$. En remplaçant x par y dans l'équation (1), on obtient que $ax = a$ quel que soit $a \in \mathbb{R}$, donc $x = 1$. On en conclut que σ est bien un automorphisme interne, car quel que soit $g \in G$, on peut écrire :

$$\sigma\left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

4. Pour prouver que $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ : \ a \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous-groupe normal de G, on commence par prouver que c'est un sous-groupe de G.
   (a) $H \subseteq G$, il suffit de prendre $b = 1$.
   (b) Le neutre $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$, en effet, il suffit de prendre $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ avec $a = 0$.
   (c) La loi . est interne et partout définie dans H, pour tout $h_1 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$:
   $$h_1.h_2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c+a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   Donc $h_1.h_2 \in H$ puisque $c + a \in \mathbb{R}$ car a et $c \in \mathbb{R}$, vu que $h_1, h_2 \in H$.
   (d) Quel que soit $h = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$, on calcule h^{-1} :
   $$h^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   Donc $h^{-1} \in H$ puisque $-a \in \mathbb{R}$ car $a \in \mathbb{R}$ vu que $h \in H$.

Il reste à prouver que H est un sous-groupe normal de G. Pour cela on va utiliser le critère du sous-groupe normal. Il faut prouver que quel que soient $g \in G$ et $h \in H$, $g.h.g^{-1} \in H$. Notons $g = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $h = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$g.h.g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{b} \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c+a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{b} \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{ac+a^2}{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$$

On a donc bien que H est un sous-groupe normal de G.
On doit maintenant montrer que $\langle G/H, . \rangle \cong \langle \mathbb{R}, + \rangle$. Pour cela, on va utiliser le théorème d'isomorphisme qui dit qu'étant donné $\varphi : G_1 \to G_2$ un morphisme, on a :

$$G_1 / \operatorname{Ker}(\varphi) \cong \operatorname{Im}(\varphi) \tag{2}$$

Le problème se ramène donc à trouver un morphisme surjectif $\varphi : \langle G, . \rangle \to \langle \mathbb{R}, + \rangle$ tel que $\operatorname{Ker}(\varphi) = H$. Pour que φ soit un morphisme de $\langle G, . \rangle$ dans $\langle \mathbb{R}, + \rangle$, il doit vérifier l'équation suivante :

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & c+ad \\ 0 & bd \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) \tag{3}$$

On voit que si on pose $\varphi\left(\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & b\end{pmatrix}\right) = \ln(b)$, l'équation (3) est vérifiée, vu que $\ln(b.d) = \ln(b) + \ln(d)$. Ce morphisme est surjectif vu que $\ln(x) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est surjective, et donc $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$. Calculons $\mathrm{Ker}(\varphi)$,

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & b\end{pmatrix} \in G \,:\, \varphi\left(\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & b\end{pmatrix} = 0\right)\} = \{\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & b\end{pmatrix} \in G \,:\, \ln(b) = 0\} = \{\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & b\end{pmatrix} \,:\, b = 1\} = H$$

En appliquant le théorème d'isomorphisme (2), on obtient :

$$G/H \cong \mathbb{R}$$