

Correction de l'examen sur les groupes de janvier 1983 (A.11)

1. On commence par prouver que $\langle G, \cdot \rangle$ est un groupe.

(a) La loi \cdot est interne et partout définie dans G , en effet :

$$\forall (a, b, c), (a', b', c') \in G \quad (a, b, c) \cdot (a', b', c') = (a + a', b + b', c + c' + a'b) \in G$$

par les propriétés du calcul dans \mathbb{R} .

(b) $(0, 0, 0)$ est le neutre pour la loi \cdot dans G :

$$\forall (a, b, c) \in G \quad (a, b, c) \cdot (0, 0, 0) = (a + 0, b + 0, c + 0 + 0 \cdot b) = (a, b, c) = (0, 0, 0) \cdot (a, b, c) = (0 + a, 0 + b, 0 + c + a \cdot 0)$$

(c) La loi \cdot est associative dans G , en effet, pour tout $(a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c'') \in G$:

$$\begin{aligned} ((a, b, c) \cdot (a', b', c')) \cdot (a'', b'', c'') &= (a + a', b + b', c + c' + a'b) \cdot (a'', b'', c'') \\ &= ((a + a') + a'', (b + b') + b'', c + c' + a'b + c'' + a''(b + b')) \\ &= (a + (a' + a''), b + (b' + b''), c + c' + c'' + a''b' + (a' + a'')b) \\ &= (a, b, c) \cdot (a' + a'', b' + b'', c' + c'' + a''b') \\ &= (a, b, c) \cdot ((a', b', c') \cdot (a'', b'', c'')) \end{aligned}$$

par les propriétés du calcul dans \mathbb{R} .

(d) Chaque élément $(a, b, c) \in G$ admet un élément inverse $(a, b, c)^{-1} = (-a, -b, ab - c) \in G$:

$$\begin{aligned} (a, b, c) \cdot (-a, -b, ab - c) &= (a + (-a), b + (-b), c + (ab - c) + (-a)b) = (0, 0, 0) \\ (-a, -b, ab - c) \cdot (a, b, c) &= ((-a) + a, (-b) + b, (ab - c) + c + a(-b)) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Reste à prouver que G est non commutatif, pour cela, il suffit de trouver deux éléments g_1 et $g_2 \in G$ tels que $g_1 \cdot g_2 \neq g_2 \cdot g_1$; prenons $(0, 1, 0)$ et $(2, 0, 0)$ deux éléments de G :

$$(0, 1, 0) \cdot (2, 0, 0) = (2, 1, 2) \neq (2, 1, 0) = (2, 0, 0) \cdot (0, 1, 0)$$

Ce qui prouve que G n'est pas commutatif.

2. Par définition, le centre de G , noté $Z(G)$ est défini par :

$$Z(G) = \{g : \forall h \in G \quad g \cdot h = h \cdot g\}$$

En appliquant cette définition au groupe G , on obtient :

$$Z(G) = \{(x, y, z) : \forall (a, b, c) \in G \quad (a, b, c) \cdot (x, y, z) = (x, y, z) \cdot (a, b, c)\}$$

Donc le triplet (x, y, z) appartient au centre de G si et seulement si l'équation (1) est vérifiée quels que soient $(a, b, c) \in G$.

$$(a, b, c) \cdot (x, y, z) = (x, y, z) \cdot (a, b, c) \Leftrightarrow (a + x, b + y, c + z + xb) = (x + a, y + b, z + c + ay) \quad (1)$$

On voit facilement que pour vérifier l'équation (1) quels que soient $(a, b, c) \in G$, il est équivalent de vérifier l'équation (2) pour tout $a, b \in \mathbb{R}$:

$$xb = ay \quad (2)$$

Donc en particulier pour $a = 1$ et $b = 0$, l'équation (2) doit être vérifiée, on en conclut que $y = 0$ est une *condition nécessaire* pour que (x, y, z) appartiennent à $Z(G)$. En remplaçant y par 0 dans l'équation (2), la condition pour appartenir au centre se résume à $xb = 0$ quel que soit $b \in \mathbb{R}$, donc $x = 0$. On peut maintenant conclure que :

$$Z(G) \subseteq \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$$

Prouver que $\{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} \subseteq Z(G)$ est un exercice facile.

3. Pour montrer que $\langle G/Z(G), \cdot \rangle \cong \langle \mathbb{R}^2, + \rangle$, nous allons utiliser le théorème d'isomorphisme qui nous dit qu'étant donné $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ un morphisme, on a :

$$G_1 / \text{Ker}(\varphi) \cong \text{Im}(\varphi) \quad (3)$$

Le problème se ramène donc à trouver un morphisme surjectif $\varphi : \langle G, \cdot \rangle \rightarrow \langle \mathbb{R}^2, + \rangle$ tel que $\text{Ker}(\varphi) = Z(G)$. Un candidat pour φ est $\varphi((a, b, c)) = (a, b)$, vérifions qu'il a les propriétés requises :

- φ est un morphisme, pour tout $(a, b, c), (a', b', c') \in G$:

$$\begin{aligned} \varphi((a, b, c) \cdot (a', b', c')) &\stackrel{?}{=} \varphi((a, b, c)) \cdot \varphi((a', b', c')) \\ \varphi((a + a', b + b', c + c' + a'b)) &\stackrel{?}{=} (a, b) + (a', b') \\ (a + a', b + b') &= (a + a', b + b') \end{aligned}$$

- φ est clairement surjectif, donc $\text{Im}(\varphi) : \mathbb{R}^2$, puisque $\forall a, b \in \mathbb{R} \varphi(a, b, 0) = (a, b)$.
- Calcul du noyau de φ :

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\varphi) &= \{(a, b, c) \in G : \varphi((a, b, c)) = (0, 0)\} \\ &= \{(a, b, c) \in G : (a, b) = (0, 0)\} \\ &= \{(0, 0, c) : c \in \mathbb{R}\} \\ &= Z(G) \end{aligned}$$

On peut maintenant appliquer le théorème d'isomorphisme (3) et on obtient le résultat souhaité.

4. Etant donné $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, pour montrer que $t_{(\alpha, \beta)}$ est un automorphisme interne, il faut montrer que :

$$\exists (x, y, z) \in G, \forall (a, b, c) \in G : t_{(\alpha, \beta)}((a, b, c)) = (x, y, z) \cdot (a, b, c) \cdot (x, y, z)^{-1}$$

En utilisant la définition de $t_{(\alpha, \beta)}$ et de la loi \cdot dans G , on obtient :

$$\begin{aligned} t_{(\alpha, \beta)}((a, b, c)) &= (x, y, z) \cdot (a, b, c) \cdot (x, y, z)^{-1} \\ (a, b, c + \alpha a + \beta b) &= (x + a, y + b, z + c + \alpha y) \cdot (-x, -y, xy - z) \\ &= (x + a + (-x), y + b + (-y), z + c + \alpha y + xy + (-z) + (-x)(y + b)) \\ &= (a, b, c + \alpha a + \beta b) \end{aligned}$$

Donc en prenant, par exemple, $(x, y, z) = (-\beta, \alpha, 0)$, on a le résultat souhaité.

5. Par la question 2, on sait que $\langle G/Z(G), \cdot \rangle \cong \langle \mathbb{R}^2, + \rangle$, d'autre part, on a toujours que $\langle G/Z(G), \cdot \rangle \cong \langle \text{Inn}(G), \circ \rangle$, en composant ces deux isomorphismes, on obtient un isomorphisme de $\langle \mathbb{R}^2, + \rangle$ dans $\langle \text{Inn}(G), \circ \rangle$.